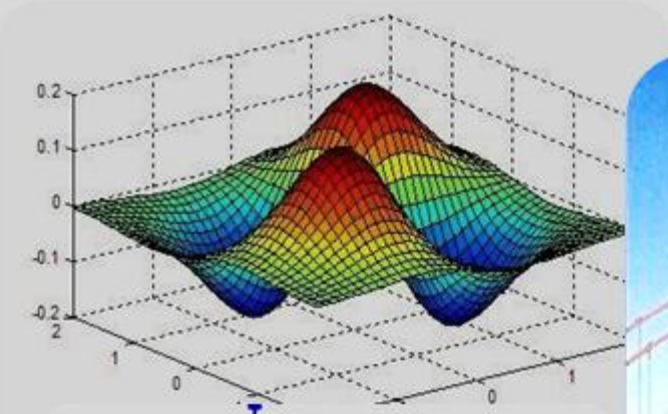
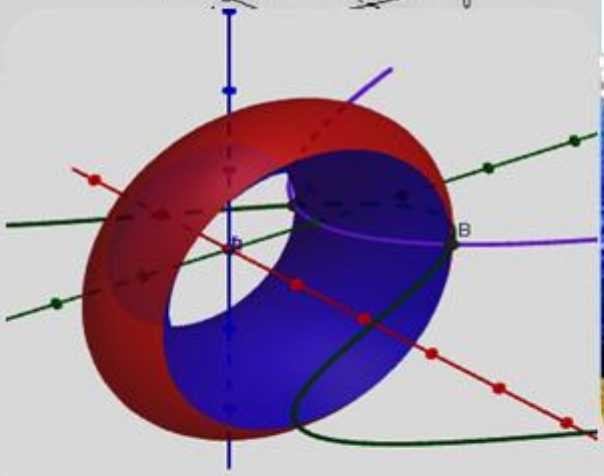
**Dr. Sunismi, M.Pd**
**Abdul Halim Fathani, S.Si., M.Pd**

# KALKULUS II

*Interactive Digital Book*



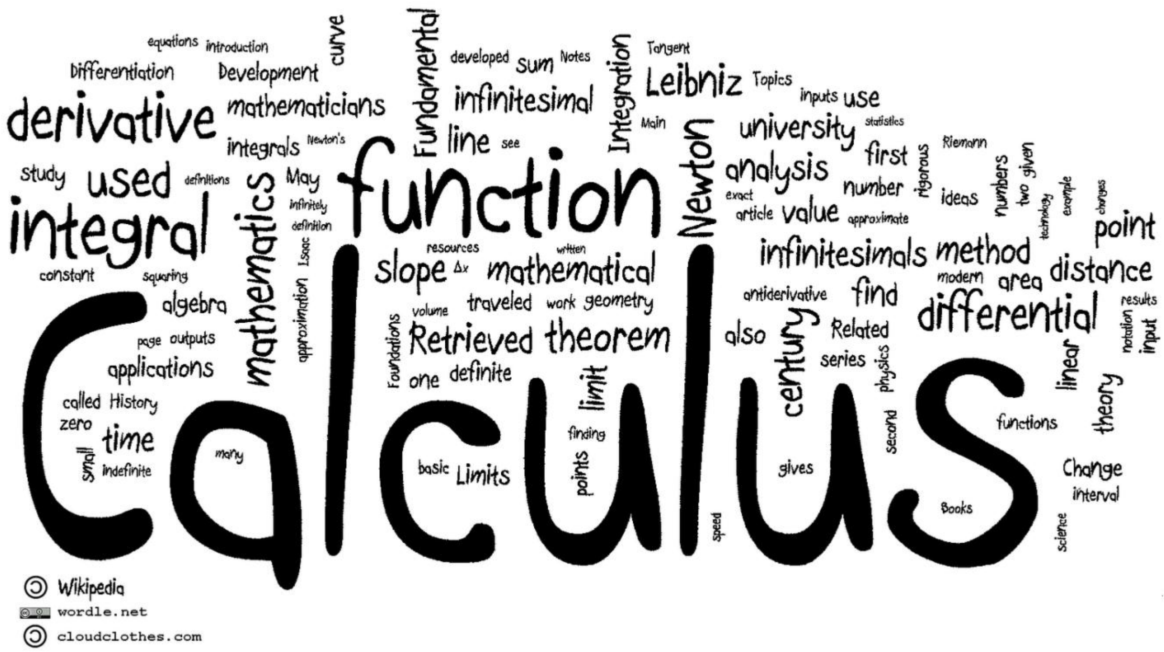





## PENELITIAN PRODUK TERAPAN
## TAHUN 2017

FKIP
UNISMA

Dr. Sunismi, M.Pd., DKK




diterbitkan dan dicetak oleh:
Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan
Universitas Islam Malang
@2018

**Dr. Sunismi, M.Pd., Dkk.**

**Kalkulus II**

Editor : Abdul Halim Fathani, S.Si., M.Pd.
Dr. Muhammad Baidawi, S.Pd., M.Pd
Desain Sampul : Dr. Sunismi, M.Pd.
Setting & Layout Isi : Dr. Sunismi, M.Pd.

Diterbitkan dan dicetak oleh Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Islam Malang
Jl. Mayjen Haryono 193 Dinoyo Kota Malang
Email: oke.ganjar@yahoo.co.id

Cetakan Kesatu, Desember 2018
ISBN 978-602-52562-3-3

# KATA PENGANTAR

Puji dan syukur yang tiada terhingga selalu kami panjatkan kehadirat Allah SWT. Hanya atas rahmat dan karunianNya kami dapat menyelesaikan penyusunan Buku Kalkulus II untuk Mahasiswa ini, dengan judul "KALKULUS II *INTERACTIVE DIGITAL BOOK* DENGAN MODEL *COLLABORATIVE LEARNING* BERBASIS BLOG"

Buku mahasiswa disusun dengan maksud untuk memberikan pedoman dan panduan bagi mahasiswa agar dapat mempelajari matakuliah kalkulus II ini dengan mudah. Buku ini disusun dengan menggunakan aplikasi *media internet berbasis BLOG,* sehingga mahasiswa dapat mempelajari materi kalkulus II ini secara berkelompok dengan berdiskusi secara online melalui media internet tidak harus melalui tatap muka secara langsung. Sehingga dapat mempelajari materi kalkulus II ini setiap saat dengan mudah. Buku ini menekankan pada penalaran mahasiswa dengan memberikan kegiatan aktif yang harus dilakukan mahasiswa berupa kegiatan diskusi secara kolaborasi dan hal-hal yang kontekstual untuk memudahkan mahasiswa mengkontruksi dan menemukan konsep, rumus, dan prinsip secara mandiri.

Akhirnya, kami berharap semoga buku ini dapat memotivasi para mahasiswa pada khususnya, dan pembaca pada umumnya dalam mempelajari dan memahami matakuliah Kalkulus II, dengan harapan mahasiswa dapat meningkatkan kemapuan berpikir kritis mahasiswa.

Kritik dan saran yang membangun dari para pemakai buku ini sangat kami harapkan demi kesempurnaan buku ini.

Malang, Mei 2017

Penulis

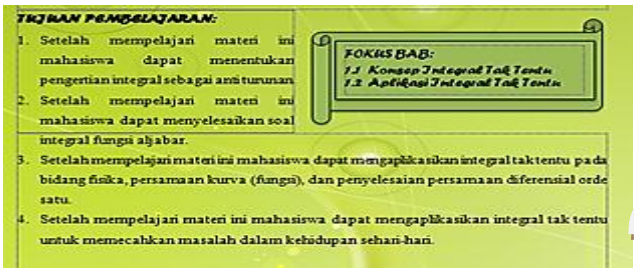
# DAFTAR ISI

# PETUNJUK PENGGUNAAN BUKU

Assalamu'alaikum wr.wb.

Buku "KALKULUS II MODEL *COLLABORATIVE LEARNING* BERBASIS BLOG" untuk Mahasiswa Program Studi Semester II FKIP. Materi di dalamnya disampaikan secara sistematis (teratur), sehingga memudahkan mahasiswa untuk mempelajari. Agar mahasiswa lebih mudah memahami setiap materi ini, berikut ini diuraikan model penyajian buku. Buku ini terdiri atas 4 bab, dan setiap bab memiliki bagian-bagian sebagai berikut:


**Bagian Awal Bab:** mengilustrasikan materi yang akan dipelajari



TUJUAN PEMBELAJARAN:

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menentukan pengertian integral sebagai anti turunan.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menyelesaikan soal integral fungsi aljabar.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat mengaplikasikan integral tak tentu pada bidang fisika, persamaan kurva (fungsi), dan penyelesaian persamaan diferensial orde satu.
4. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat mengaplikasikan integral tak tentu untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

FOKUS BAB:
1.1 Konsep Integral Tak Tentu
1.2 Aplikasi Integral Tak Tentu

**Tujuan Pembelajaran:** menggambarkan kemampuan dasar yang hendak dicapai dan dikembangkan dalam tiap-tiap pembelajaran


**Peta Konsep**: memberikan gambaran mengenai materi-materi yang akan dipelajari setiap bab.


PENGANTAR

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, fisika, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi.

Pada saat kita terjebak kemacetan, dapatkah kita menghitung berapa jarak, dan kecepatan mobil kita? Salah satunya dapat dihitung dengan integral. Kegunaan integral khusus integral tak tentu dalam bidang fisika, adalah untuk menghitung jarak yang ditempuh oleh mobil yang berjalan dengan kecepatan tertentu.

**Pengantar**: berisi gambaran pada materi yang akan dipelajari, dan kegunaannya dalam kehidupan sehari-hari.


BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORASI-4.1

A. LUAS DAERAH DENGAN KONSEP LIMIT JUMLAH RIEMANN

Menentukan luas daerah dengan *konsep limit jumlah Riemann* dapat diilustrasikan oleh Gambar 4.1 di bawah. Langkah pertama yang dilakukan adalah *membuat partisi, mengaproksimasi, menjumlahkan dan menghitung limitnya*.

Misalkan daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$ yang kontinu pada $[0, a]$, dan sumbu x, seperti Gambar 4.1. Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah menentukan luas bidang dengan *konsep limit jumlah Riemann*:

1. Gambarlah daerahnya


Gambar 4.1

**Bahan diskusi secara kolaborasi:** mahasiswa berkelompok untuk kerjasama dalam memahami setiap materi kalkulus II, yaitu berupa rumus/konsep/ atau prinsip.

**Cek Pemahaman**

1. Tentukan integral dari $\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Penyelesaian:

Misal $u = 1-x^2 \Leftrightarrow du = \ldots\ dx \Leftrightarrow dx = \frac{du}{\ldots}$

Substitusikan permisalan ke soal $\int 2x\sqrt{1-x}\,dx$, sehingga diperoleh

$\int 2x\sqrt{\ldots}\,\frac{du}{\ldots} = \int \ldots\ du$, dengan rumus dasar di dapat hasil integralnya

$= \ldots + C$

Hasil akhir integral $u$ diganti lagi dengan $1-x^2$, sehingga diperoleh hasil integral:

$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \ldots + C$

**Cek Pemahaman**: mengecek kemampuan mahasiswa menyelesaikan soal, setelah memahami konsep/prinsip.

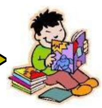
**LEMBAR KERJA-2.1**

Tentukanlah setiap integral tak tentu dengan integral subtitusi berikut ini!

1. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
2. $\int \frac{3dt}{\sqrt{2t+1}}$
3. $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$
5. $\int x(3x+2)^{3/2}dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$

8. $\int \frac{\sin x dx}{16+\cos^2 x}$
9. $\int \cos(2x-4)dx$
10. $\int x\sin(x^2+1)dx$
11. $\int x^2\cos(x^3+1)dx$
12. $\int x(x^2+3)^{-12/7}dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}dx$
14. $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$

**Lembar Kerja:** berisikan soal-soal yang menantang untuk menguji kecerdasannya. Bagian ini dapat memotivasi mahasiswa dalam memahami konsep secara total.



**UJI KOMPETENSI**

Berisi soal-soal untuk mengukur kemampuan akhir mahasiswa dalam mempelajari materi setiap bab.

**Daftar Pustaka**

Memuat daftar referensi penulisan buku

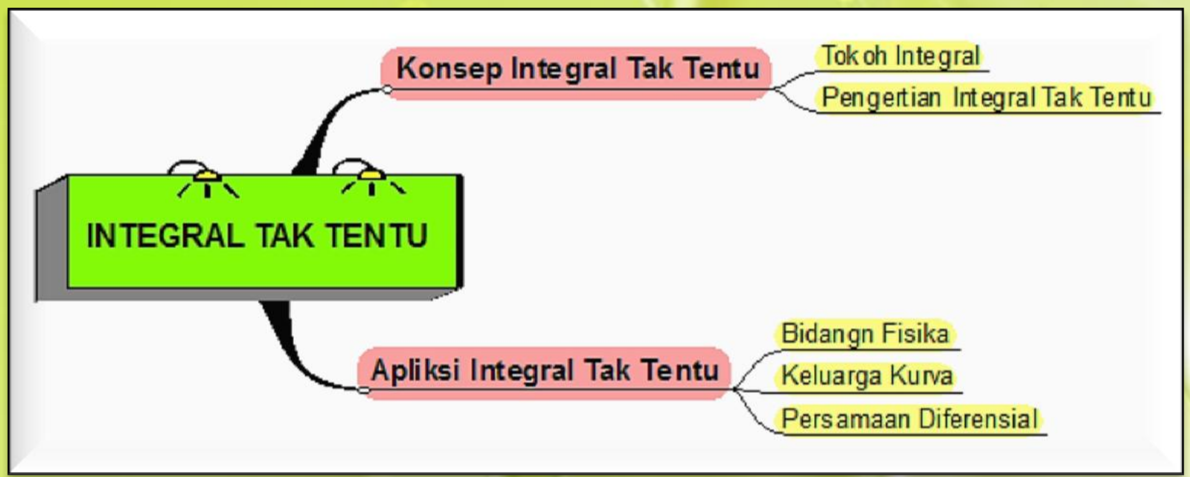
# BAB I
# INTEGRAL TAK TENTU

**TUJUAN PEMBELAJARAN:**

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menentukan pengertian integral sebagai anti turunan.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menyelesaikan soal integral fungsi aljabar.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat mengaplikasikan integral tak tentu pada bidang fisika, persamaan kurva (fungsi), dan penyelesaian persamaan diferensial orde satu.
4. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat mengaplikasikan integral tak tentu untuk memecahkan masalah dalam kehidupan sehari-hari.

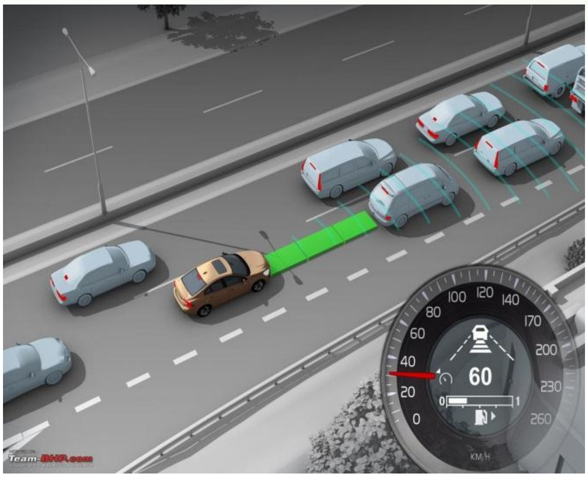
**FOKUS BAB:**
**1.1 Konsep Integral Tak Tentu**
**1.2 Aplikasi Integral Tak Tentu**

**PETA KONSEP**



## *PENGANTAR*

Kegunaan integral sebagai ilmu bantu dalam geometri, fisika, teknologi, biologi dan ekonomi tak dapat disangkal lagi.



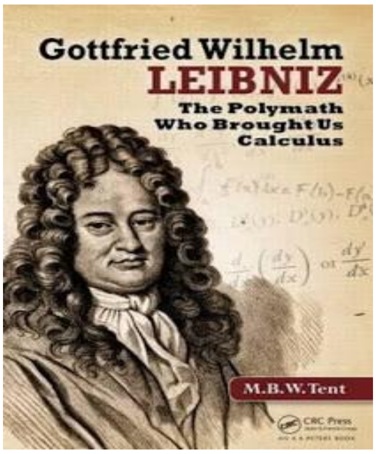
Blogs.itb.ac.id

Pada saat kita terjebak kemacetan, dapatkah kita menghitung berapa jarak dan kecepatan mobil kita? Salah satunya dapat dihitung dengan integral. Kegunaan integral khusus integral tak tentu dalam bidang fisika adalah untuk menghitung jarak yang ditempuh oleh mobil yang berjalan dengan kecepatan tertentu.

## 1.1 KONSEP INTEGRAL TAK TENTU

### TOKOH INTEGRAL

Tokoh yang pertama kali menemukan konsep diferensial dan anti-diferensial (integral) dalam matematika adalah **Gottfried Wilhelm von Leibniz** (1646-1716). Leibniz mendapatkan penghargaan dalam mengembangkan kalkulus modern, yaitu integral.

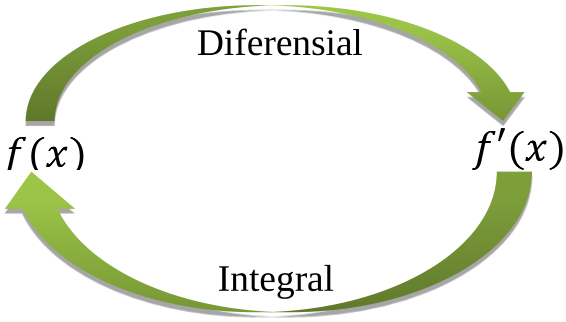



Integral terbagi atas dua macam, yaitu integral tentu dan integral tak tentu. Integral tentu adalah suatu integral yang dibatasi oleh batas atas dan batas bawah. Sedangkan integral tak tentu adalah integral tanpa batas atas maupun batas bawah.

Lambang integral diambil dari huruf pertama nama Leibniz, yaitu huruf ”L”. Namun pada zaman dahulu huruf L ditulis dalam huruf Latin yang indah, yaitu $\mathscr{L}$ atau $\mathfrak{L}$, sehingga sampai sekarang dikenal dengan notasi $\int$ .

## Pengertian Integral Tak Tentu

Integral dan diferensial merupakan dua hal yang saling terkait. Pada diferensial, akan dicari derivatif bila diberikan suatu fungsi. Sebaliknya pada integral, akan dicari fungsi asal/fungsi primitif jika derivatifnya diberikan. Bila diilustrasikan sebagai berikut:




Proses menentukan fungsi asal/fungsi primitif bila diketahui derivatifnya akan ditunjukkan dengan beberapa masalah pada tabel berikut. Silahkan diselesaikan!

**Tabel 1.1: Daftar fungsi real dan mencari turunannya**

| $\boldsymbol{f(x)}$ | $\boldsymbol{f'(x)}$ |
|---|---|
| $\boldsymbol{x^3}$ | $3x^2$ |
| $\boldsymbol{x^3+1}$ | ......... |
| $\boldsymbol{x^3+100}$ | ......... |
| $\boldsymbol{x^3-125}$ | ......... |
| $\boldsymbol{x^3+\sqrt{3}}$ | ......... |
| $\boldsymbol{x^3-\frac{2}{3}}$ | ......... |
| $\boldsymbol{x^3+C}$, **dengan** $\boldsymbol{C \in R}$ | ......... |

Berdasarkan Tabel 1.1 di atas, dapat dipelajari proses kebalikan dari diferensial/turunan. Secara umum, bila diketahui $f'(x)$ = ......, maka tentukan $f(x)$ = ........... . Proses kebalikan dari diferensial/turunan seperti itulah yang disebut dengan **integral**, yang dinotasikan: $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Secara umum, fungsi $F(x)$ dapat dikatakan sebagai *anti derivatif* atau *anti turunan* dari fungsi $f(x)$, jika $F'(x) = f(x)$ untuk semua $x$ dalam domain $f$. Himpunan semua antiderivatif $F$ merupakan integral tak tentu $f$ terhadap $x$, dinotasikan dengan $\int f(x)dx$.

**Definisi:**

> Fungsi $F(x)$ adalah anti derivatif/anti turunan dari $f(x)$ pada interval I, yang dinotasikan $A_x(f)$ atau $\int f(x)dx$, bila $F'(x) = f(x)$ untuk setiap x

Simbol $\int$ merupakan tanda integral, fungsi $f$ disebut *integran* dan $x$ adalah variabel integrasi. Karena $F'(x) = f(x)$, maka: $\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C$. Dibaca, integral tak tentu $f$ terhadap $x$ adalah $F(x)$ + C. Konstanta C merupakan konstanta integrasi atau konstanta sembarang. Jadi hasil dari suatu integral selalu ditambah C, sehingga integral yang demikian disebut dengan integral tak tentu, karena memuat C (konstanta tak tentu).

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORASI-1.1**

Berdasarkan rumus-rumus derivatif/turunan, maka dapat diperoleh rumus-rumus dasar integral. Untuk memperoleh rumus-rumus dasar integral selesaikan masalah dalam Tabel 1.2 berikut:

**Tabel 1.2: Daftar fungsi real, turunan, dan integral**

| $f(x)$ | $f'(x)$ | $\int f'(x)dx$ (Integral) |
|---|---|---|
| $\mathbf{2x^5}$ | $10x^4$ | $\int 10x^4\, dx = \mathbf{2x^5} + C$ |
| $\boldsymbol{x}$ | $1$ | $\int 1\ dx = x + C$ |
| $\mathbf{\frac{1}{2}x^2}$ | ... | $\int \dots\ dx = \dots + C$ |
| $\mathbf{\frac{1}{3}x^3}$ | ... | $\int \dots\ dx = \dots + C$ |
| $\mathbf{\frac{1}{4}x^4}$ | ... | $\int \dots\ dx = \dots + C$ |
| .<br>.<br>. | .<br>.<br>. | .<br>.<br>. |
| $\boldsymbol{\frac{1}{n+1}x^{n+1}, n \neq -1}$ | ... | $\int \dots\ dx = \dots + C$ |
| $\boldsymbol{\frac{a}{n+1}x^{n+1},}$<br>$\boldsymbol{n \neq -1, dan\ a\ konstanta}$ | ... | $\int \dots\ dx = \dots + C$ |

Berikut ini pada Tabel 1.3, carilah rumus dasar integral untuk fungsi trigonometri, siklometri, logaritma, dan eksponen seperti tabel berikut ini.

**Tabel 1.3: Daftar fungsi trigonometri, turunan, dan integral**

| $\boldsymbol{f(x)}$ | $\boldsymbol{f'(x)}$ | $\int \boldsymbol{f'(x)dx}$ **(Integral)** |
|---|---|---|
| $\boldsymbol{sin\,x}$ | $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ | $\int \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}\ dx = sin\,x \ + C$ |
| $\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$ | $-sin\,x$ | $\int -\boldsymbol{sin\,x}\,dx = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} \ + C$, menjadi $\int \boldsymbol{sin\,x}\ dx = -\mathbf{cos}\,\boldsymbol{x} \ + C$ |
| $\mathbf{tan}\,\boldsymbol{x}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{cot}\ \boldsymbol{x}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{secan}\,\boldsymbol{x}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{cosec\ x}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{sin\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{cos\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{tan\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{cot\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{secan\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{cosec\ (ax+b)}$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{arc\ sin}\,\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{sin^{-1}x})$ | ... | $\int \frac{1}{\sqrt{\ldots - \ldots}}\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{arc\ cos}\,\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{cos^{-1}x})$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{arc\ tan}\,\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{tan^{-1}x})$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{arc\ cot}\ \boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{cot^{-1}x})$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\mathbf{arc\ secan}\,\boldsymbol{x}\quad (\boldsymbol{secan^{-1}x})$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |
| $\boldsymbol{arc\ cosec\ x}\quad (\boldsymbol{cosec^{-1}x})$ | ... | $\int \ldots\ dx = \ldots\ + C$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\ln x$ | ... | $\int$ ... $dx =$ ... $+ C$ |
| $e^x$ | ... | $\int$ ... $dx =$ ... $+ C$ |

Berdasarkan Tabel di atas dapat diperumum seperti pada teorema-teorema berikut ini. Silahkan buktikan teorema-teorema tersebut berdasarkan petunjuk berikut ini.

INGAT

***Petunjuk:*** hasil dari suatu integral merupakan anti turunan, oleh karena itu cukup mendiferensialkan anti turunan bila hasilnya sama dengan integrannya, maka teorema terbukti.

***TEOREMA 1***

Jika $f(x)$ suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan $n$ sebarang bilangan real kecuali -1, maka $\int x^n\, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

***TEOREMA 2 (Kelinearan Integral)***

Misalkan $f$ dan $g$ mempunyai anti turunan dan $k$ merupakan konstanta sebarang bilangan real, maka:

$a. \int k\, f(x) dx = k \int f(x)\, dx$

$b. \int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

$c. \int [f(x) - g(x)] dx = \int f(x) dx - \int g(x) dx$

***TEOREMA 3 (Aturan Pangkat yang diperumum)***

Jika $g(x)$ suatu fungsi yang dapat didiferensialkan dan $n$ sebarang bilangan real kecuali -1, maka $\int [g(x)]^n g'(x)\, dx = \frac{1}{n+1} g(x)^{n+1} + C$

<u>ATAU</u>

Jika ditetapkan $u = g(x), maka\ du = g'(x) dx$ dapat disimpulkan $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

## Cek Pemahaman

1. Tentukan integral dari $\int x^{-3} dx$!

   ***Penyelesaian:***

   Gunakan teorema 1: $\int x^{-3} dx = \frac{1}{-3+1}\, x^{-3+1} = \frac{x^{-2}}{-2} + C$

2. Tentukan integral dari $\int (3x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 3) dx$!

   ***Penyelesaian:***

   Gunakan Teorema 2: ………………………………………………………………………..

3. Tentukan integral dari $\int 3x^2(x^3 - 2)^5\, dx$!

   ***Penyelesaian:***

   *Kita gunakan Teorema 3 untuk menyelesaikan:*

   *Misalkan* $u = x^3 - 2,$ *maka* $du = 3x^2\, dx \;\rightarrow dx = \frac{du}{3x^2}$ *, kemudian substitusikan ke Soal, sehingga dapat digunakan teorema 3.*

   $$\int 3x^2(u^5)\frac{du}{3x^2} = \int u^5 \;\; du = \frac{1}{6}u^6 \;\; + C$$

   *Ingat hasil akhir* $u$ *diganti lagi dengan* $x^3 - 2$*, sehingga diperoleh hasil akhir sbb:*

   $$\int 3x^2(x^3 - 2)^5\, dx = \; \frac{1}{6}(x^3 - 2)^6 \; + C$$

4. Tentukan integral dari $\int x^2(x^3 - 2)^4\, dx$!

   ***Penyelesaian:***

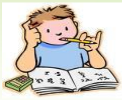
   *Gunakan Teorema 3 untuk menyelesaikan soal ini, seperti soal nomor 3 di atas.*

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………

   ……………………………………………………………………………………………………



## LEMBAR KERJA-1.1

Cari anti turunan umum $F(x) + C$ untuk masing-masing soal berikut!

1. $f(x) = 4x^5 - x^3$

2. $f(x) = x^2(x^3 + 5x^2 - 3x + \sqrt{3})$

3. $f(x) = \dfrac{4x^6 + 3x^4}{x^3}$

4. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x^3}$

5. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x}}{x} + \dfrac{3}{x^5}$

Tentukanlah setiap integral tak tentu berikut ini!

6. $\int (5x^4 - \pi)\, dx$

7. $\int \frac{4x^6+3x^5-8}{x^5}\, dx$

8. $\int x^2(x^3 + 5)^9\, dx$

9. $\int x\sqrt{2x^2 - 1}\, dx$

10. $\int (x + 2)\sqrt{x^2 + 4x + 1}\, dx$

11. $\int (x^3 - 2\sin x) dx$

12. $\int \sin x\, cos^3 x\, dx$

13. $\int e^{x^2+1}\, 2\text{x}\, dx$

14. $\int \frac{2x}{x^2+1}\, dx$

15. $\int cos^4 2x\, (-2\sin 2x)\, dx$

Tentukanlah fungsi $g(x)$, jika diketahui:

16. $g'(x) = 6x^2 + 4x + 1 \;\; dan \;\; g(1) = 5$

17. $g'(x) = x - \dfrac{1}{x^2} \;\; dan\; g(2) = 4\dfrac{1}{2}$

18. $g'(x) = \sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}} \;\; dan\; g(4) = 3\dfrac{1}{3}$

Buktikan rumus berikut:

19. $\displaystyle\int [f(x)g'(x) + f'(x)g(x)]\, dx = f(x)g(x) + C$

20. $\displaystyle\int \frac{x^4 + 1}{x^2\sqrt{x^4 - 1}}\, dx = \frac{\sqrt{x^4 - 1}}{x} + C$

****OOO****

## 1.2 APLIKASI INTEGRAL TAK TENTU

### 1.2 1 APLIKASI PADA BIDANG FISIKA

Integral tak tentu digunakan untuk menentukan jarak suatu benda jika diketahui kecepatannya dan juga menentukan kecepatan benda jika diketahui percepatannya.

Dengan mengingat pengertian-pengertian dalam mekanika bahwa $s(t), v(t), dan\ a(t)$

*Noretz-area.blogspot.com*

masing-masing merupakan jarak, kecepatan dan percepatan pada saat t dari suatu benda yang bergerak sepanjang suatu garis koordinat. Dimana kecepatan adalah laju perubahan jarak pada saat waktu t, yaitu $\boldsymbol{v(t) = s'(t) = \frac{ds}{dt}}$.

Sedangkan percepatan adalah laju perubahan kecepatan pada saat waktu t**,** yaitu $\boldsymbol{a(t) = v'(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}$. Kecepatan sebagai fungsi t diketahui, dan akan dicari posisi (jarak), maka digunakan relasi dari $\boldsymbol{v(t) = \frac{ds}{dt} \to ds = \cdots dt}$,sehingga jarak (s) dapat ditentukan dengan menggunakan integral, yaitu $\boldsymbol{s(t) = \int \ldots\ dt + C}$. Demikian juga bila $\boldsymbol{a(t) = \frac{dv}{dt} \to dv = \cdots\ \ dt \to v = \int \ldots\ \ dt + C}$

**Cek Pemahaman**

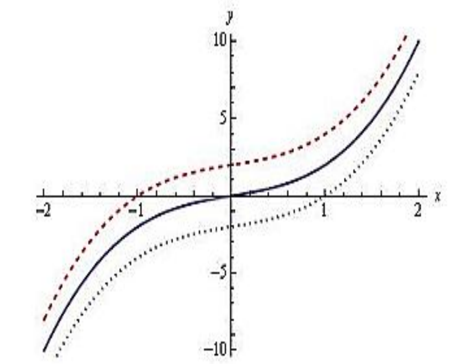
1. Dari suatu benda yang bergerak ditentukan percepatannya adalah $a = 6t - 2$ dengan $a =$ percepatan dan $t =$ waktu. Jika pada detik ke 1 kecepatan benda adalah 2 meter/detik dan pada detik ke 3 benda tersebut menempuh jarak (s) sejauh 2 m. Tentukan rumus jarak (s)!

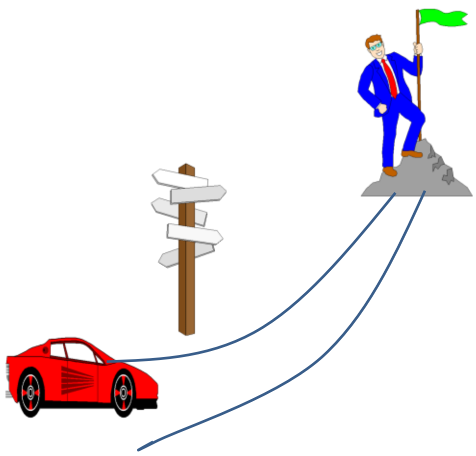
   ***Penyelesaian:***

   $a = 6t - 2$, dengan mengingat bahwa $\boldsymbol{v} = \int \ldots dt$, sehingga dapat ditentukan $v\ (kecepatan)$.

## 1.2 2 APLIKASI PADA KELUARGA KURVA

Penerapan integral tak tentu dapat digunakan untuk menentukan persamaan dari suatu kurva $y = f(x)$, bila diketahui gradiennya dan sebuah titik pada kurva tersebut. Dengan mengingat bahwa persamaan suatu kurva $y = f(x)$, maka gradien garis singgung pada setiap titik $P\ (x, y)$ pada kurva tersebut adalah $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.



Jika diketahui gradien garis singgung di sebarang titik $P\ (x, y)$ yang terletak pada sebuah kurva, maka persamaan kurvanya dapat ditentukan dengan menggunakan integral, yaitu $\frac{dy}{dx} = f'(x) \rightarrow dy = f'(x)dx \rightarrow y = \int \ \ldots \ \ dx = \ \ldots \ + C$

### Cek Pemahaman

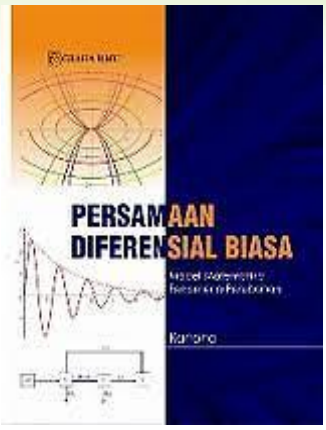
2. Diketahui gradien garis singgung suatu kurva di titik $(x, y)$ adalah $6x^2 - 2x$ dan kurva tersebut melalui titik $(1,4)$. Tentukan persamaan kurva tersebut!

 ***Penyelesaian:***

 $m = \frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2x \rightarrow y = \int ( \ \ldots \ - \ \ldots \ ) \ dx = \ \ldots$

 Melalui titik $(1,4)$, $tentukan\ nilai\ C$:

## 1.2 3 APLIKASI PADA PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA




Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat sebuah fungsi yang tidak diketahui dan turunan-turunannya. Menyelesaikan suatu persamaan diferensial adalah mencari suatu fungsi yang tidak diketahui. Suatu fungsi disebut solusi dari persamaan diferensial, jika fungsi tersebut disubstitusikan ke dalam persamaan diferensialnya menjadi persaman diferensial yang bernilai benar.

Ada berbagai macam persamaan diferensial, dalam pembahasan ini akan dibahas tentang persamaan diferensial biasa orde satu yang dapat dipisah, artinya persamaan ini hanya memuat turunan pertama dengan variabel yang dapat dipisahkan. Secara umum persamaan diferensial ini mempunyai bentuk umum sebagai berikut: $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$.

Persamaan diferensial dengan bentuk $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$, dapat ditulis $g(y)dy = f(x)dx$. Sehingga solusinya dapat dicari dengan mengintegralkan kedua ruas sehingga akan ditemukan jawab/solusi umum persamaan diferensial tersebut.

**Cek Pemahaman**

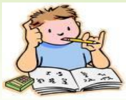
3. Carilah solusi umum persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$.

***Penyelesaian:***

$\frac{dy}{dx} = x^2\sqrt{y}$ , dengan mengumpulkan variabel $x$ dengan $dx$ dan variabel $y$ dengan $dy$, kemudian diintegralkan maka dapat diperoleh jawab umumnya.

……………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………..



## LEMBAR KERJA-1.2

**Selesaikan setiap soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1. Carilah persamaan kurva-xy dari kurva yang melalui $(3, -15)$ dengan gradien (kemiringan) pada sebarang titik adalah $-4x + 3$.
2. Carilah persamaan kurva-xy dari kurva yang melalui $(2\,, 20)$ dengan gradien (kemiringan) pada sebarang titik adalah $3x^2 + 4x - 1$.

Soal 3-4, tunjukkan bahwa fungsi yang diketahui merupakan solusi dari persamaan diferensial yang diberikan.

3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x}{y} = 0; \quad y = \sqrt{1 - x^2}$
4. $-x\dfrac{dy}{dx} + y = 0; \; y = Cx$

Soal 5-7, cari solusi umum (memuat C) untuk persamaan diferensial berikut ini. Kemudian carilah solusi khusus dengan syarat yang telah diberikan.

5. $\frac{dy}{dx} = y^4, dengan\ y = 1\ pada\ x = 0$
6. $\frac{ds}{dt} = 16t^2 + 4t - 1, dengan\ s = 100\ pada\ t = 0$
7. $\frac{dy}{dx} = -y^2x(x^2 + 2)^4, dengan\ y = 1\ pada\ x = 0$

Soal 8-9, diketahui sebuah objek bergerak sepanjang suatu garis koordinat menurut percepatan $a$ (dalam cm per detik) dan jarak berarah $s_0$ (dalam cm). Cari kecepatan $v$ beserta jarak berarah $s$ setelah 2 detik.

8. $a = (1 + t)^{-4}, dengan\ v_0 = 0\ dan\ s_0 = 10$
9. $a = \sqrt[3]{2t + 1}\,, dengan\ v_0 = 0\ dan\ s_0 = 10$

10. Sebuah bola dilemparkan ke atas dari permukaan bumi (ketinggian awal = 0 kaki) dengan kecepatan awal 96 kaki per detik. Berapa tinggi maksimum yang dicapainya. (**Petunjuk:** percepatan gravitasi bumi adalah 32 kaki/detik)

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-1

**A. Pilihan Ganda: Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Gradien garis singgung di setiap titik pada kurva $y = f(x)$ adalah $3x^2 - 6x + 5$. Jika kurva tersebut melalui titik $(1, -3)$ maka persamaan kurva …

   $A.\ y = 6x^3 - 6x^2 + 5x - 8$ $\quad$ $D.\ y = 6x^3 - 6x^2 + 5x - 2$

   $B.\ y = 6x^3 - 6x^2 + 5x + 2$ $\quad$ $E.\ y = x^3 - 3x^2 + 5x - 6$

   $C.\ y = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$

2. Diketahui $F'(x) = 6x^2 - 4x + 3$ dan $F(3) = 21$. Tentukan nilai $F(0) + F(2) = \cdots$

   $A. -33$ $\quad$ $B. -34$ $\quad$ $C. -35$ $\quad$ $D. -36$ $\quad$ $E. -37$

3. $\int \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 6\right)\, dx = \cdots$

   A. $3\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6x + C$ $\quad$ $D.\ \frac{3}{2}x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6x + C$

   $B.\ 3x\sqrt{x} + \sqrt{x} + 6x + C$ $\quad$ $E.\ \frac{3}{4}x\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt{x} + 6x + C$

   $C.\ 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + 6x + C$

4. Gradien garis singgung di setiap titik pada kurva $y = f(x)$adalah $2x - 5$. Jika kurva ini melalui titik $(4{,}7)$ maka ordinat titik potong kurva dengan sumbu Y adalah…

   $A.\ 11$ $\quad$ $B.\ 10$ $\quad$ $C.\ 9$ $\quad$ $D.\ 8$ $\quad$ $E.\ 7$

5. Jika $f(x) = \int(3x^2 - 2x + 5)\, dx$ dan $f(1) = 0$, maka $f(x) = \cdots$

   $A.\ 2x^3 - 2x^2 + 5x - 6$ $\quad$ $D.\ x^3 - x^2 + 5x - 5$

   $B.\ 4x^3 - 2x^2 + 5x - 4$ $\quad$ $E.\ x^3 - x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{5}{2}$

   $C.\ x^3 - x^2 + 5x - 7$

6. Jika $y' = 6x + 2$ adalah turunan kurva $y = f(x)$ yang melalui titik (4 , 25), maka persamaan garis singgung pada kurva $y = f(x)$di titik yang berabsis 2 adalah …

   $A.\ y = 4\,(x - 2)$ $\quad$ $D.\ y - 15 = 14(x - 2)$

   $B.\ y = 14(x + 2)$ $\quad$ $E.\ y - 15 = 14(x + 2)$

   $C.\ y + 15 = 14(x - 2)$

7. $\int e^{\sin x} \cos x\, dx = \cdots$

   $A.\ e^{\cos x} + C$ $\quad$ $B.\ e^{\sin x} + C$ $\quad$ $C.\ \sin x\, e^{\cos x} + C$

$D.\ \cos x\, e^{\cos x} + C \quad E.\ \sin x\, e^{\sin x} + C$

8. $\int \frac{1}{x \ln x}\, dx = \cdots$

$A.\ \ln x + C \qquad B.\ \frac{1}{\ln x} + C \qquad C.\ \ln(\ln x) + C$

$D.\ \frac{x}{\ln x} + C \qquad E.\ \frac{\ln x}{x} + C$

9. $\int \frac{(z^2+1)^2}{\sqrt{z}} = \cdots$

$A.\ \frac{1}{9} z^{9/2} + \frac{4}{5} z^{5/2} + z^{1/2} + C \qquad D.\ \frac{2}{9} z^{9/2} + \frac{4}{5} z^{5/2} + z^{1/2} + C$

$B.\ \frac{1}{9} z^{9/2} + \frac{4}{5} z^{5/2} + 2z^{1/2} + C \qquad E.\ \frac{1}{9} z^{9/2} + 5z^{5/2} + 2z^{1/2} + C$

$C.\ \frac{2}{9} z^{9/2} + \frac{4}{5} z^{5/2} + 2z^{1/2} + C$

10. Diketahui $f''(x) = x + x^{-3}$, maka tentukan $f(x)$. (Petunjuk: integralkan dua kali)

$A.\ f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} + C_1x + C_2 \qquad D.\ f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2x} + C_1x + C_2$

$B.\ f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} + C \qquad E.\ f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x + C_1x + C_2$

$C.\ f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x} + C$

11. Tentukan integral tak tentu $\int \frac{\left(\frac{1}{x} + \sqrt{x}\right)^2}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$A.\ \frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} - 6x^{-\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C \qquad D.\ -\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} + x^{-\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

$B.\ -\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} - 6x^{-\frac{2}{6}} - \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C \qquad E.\ -\frac{3}{5}x^{-\frac{5}{3}} - 6x^{-\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

$C.\ \frac{5}{3}x^{-\frac{5}{3}} - 6x^{-\frac{1}{6}} + \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

12. Tentukan jawab umum persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3x^2}{y^2}$, dengan $y(0) = 6$

13. Diketahui $4x + 2y = 8 + \pi$ merupakan persamaan garis singgung suatu kurva di titik ( $\frac{\pi}{4}$,4). Jika di setiap (x,y) pada kurva berlaku $\frac{d^2y}{dx^2} = -12\cos 2x$, tentukan persamaan kurva.

14. Percepatan suatu benda bergerak dinyatakan dengan $a(t) = 60 - 60\,t$ dengan kecepatan awal 20 m/dt, dengan jarak dalam meter dan waktu dalam detik. Tentukan jarak tempuh selama 2 detik.

15. Jalan menuju puncak memiliki kemiringan $4x - 3$. Tentukan ketinggian pada jarak 100 meter dari posisi awal sebelum jalan mendaki.

16. Kecepatan sebuah pesawat terbang dalam meter/detik dituliskan dengan $v(t) = -t^2 + 64t + 40$. Tentukan ketinggian pesawat setelah 30 detik dari keberangkatan.

17. Suhu pada hari tertentu yang diukur pada bandara sebuah kota adalah berubah setiap waktu dengan laju $T'(t) = 0{,}15t^2 - t$ dengan t diukur dalam jam. Jika suhu pada jam 6 pagi adalah 24$^o$ C. berapakah suhu pada jam 10 pagi.

18. Pada permukaan bulan, percepatan gravitasi adalah $-5{,}28\ {}^{meter}/_{detik^2}$. Jika sebuah benda dilemparkan ke atas dari suatu ketinggian awal 1000 kaki dengan kecepatan $56\ {}^{meter}/_{detik}$, carilah kecepatan dan tingginya 4,5 detik kemudian.

****OOO****

# BAB II

# TEKNIK PENGINTEGRALAN

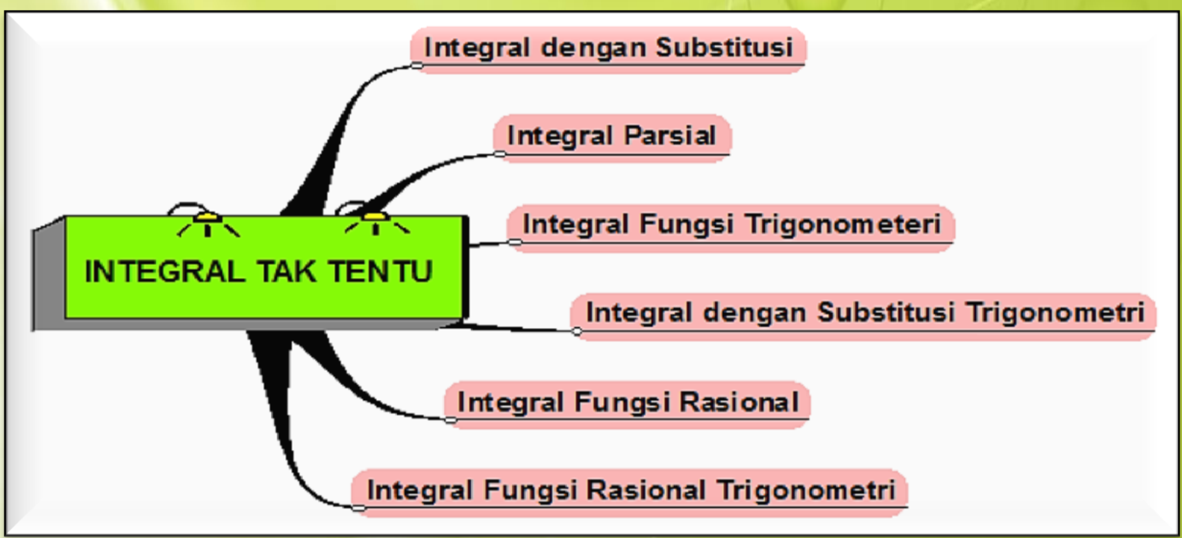
**TUJUAN PEMBELAJARAN:**

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dengan integral substitusi.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dengan integral parsial.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu dengan integral fungsi trigonometri.
4. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu fungsi aljabar dengan substitusi fungsi trigonometri.
5. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu dengan integral fungsi rasional.
6. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung integral tak tentu dengan integral fungsi rasional trigonometri.

**FOKUS BAB 2:**

2.1 Integral Dengan Substitusi
2.2 Integral Parsial
2.3 Integral Fungsi Trigonometri
2.4 Integral Substitusi Fungsi Trigonometri
2.5 Integral Fungsi Rasional
2.6 Integral Fungsi Rasional Trigonometri

**PETA KONSEP**



## PENGANTAR

Pada prinsipnya terdapat beberapa teknik pengintergralan yang dapat digunakan untuk menentukan antiturunan (integral tak tentu) suatu fungsi. Hal ini bertujuan untuk memudahkan dalam menentukan selesaian integral fungsi yang ditentukan. Beberapa teknik pengintegralan yang dimaksud adalah sebagai berikut.

1) Integral dengan substitusi,

2) Integral parsial

16) Integral fungsi trigonometri,

17) Integral subtitusi fungsi trigonometri,

18) Integral fungsi rasional, dan

19) Integral fungsi rasional trigonometri

## 2.1 INTEGRAL DENGAN SUBSTITUSI

Pedoman untuk menggunakan integral dengan substitusi adalah teorema 1 dan teorema 3 yang telah diuraikan di Bab I seperti berikut.

$$a.\ Teorema\ 1: \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, dengan\ \ n \neq -1$$

$$b.\ Teorema\ \ 3: \int [f(x)]^n f\ '(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C, dengan\ \ n \neq -1$$

## BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.1

1. $\int (3x+4)\ dx = \ldots$
2. $\int (3x+4)^2\ dx = \ldots$
3. $\int (3x+4)^3\ dx = \ldots$
4. $\int (3x+4)^{16}\ dx = \ldots$

**Perhatikan integral di samping!**

1. Pada soal nomor 1, dapat secara langsung ditentukan hasil integralnya dengan menggunakan rumus dasar yang telah ada (menggunakan teorema 1). Berapa hasilnya? Silahkan dicari!

   $\int (3x+4)\ dx = \ldots$

2. Pada soal nomor 2, agar dapat diintegralkan dengan mudah, maka fungsi yang ada di dalam tanda kurung dikuadratkan terlebih dahulu atau dikalikan sebanyak dua kali, kemudian diintegralkan (menggunakan teorema 1). Silahkan dicari integralnya!

   $\int (3x+4)^2\ dx = .\int (\ ..\ +\ \ldots + \ \ldots\ )\, dx = \ldots$

3. Pada soal nomor 3, menentukan selesaian caranya sama dengan soal nomor 2, tapi bukan dikuadratkan tetapi dipangkat tigakan terlebih dahulu atau dikalikan sebanyak tiga kali, baru diintegralkan (menggunakan teorema 1). Silahkan dicari integralnya!

   $\int (3x+4)^3\ dx = .\int (\ ..\ +\ \ldots + \ \ldots\ + \ldots\ )\, dx = \ldots$

4. Sedangkan untuk soal nomor 4, apakah harus mengalikan sebanyak 16 kali? Untuk menjawab integral pada soal nomor 4, tidak harus mengalikan sebanyak 16 kali tetapi ada cara lain yang dapat digunakan untuk memudahkan, yaitu dengan menggunakan metode permisalan (menggunakan teorema 3) dengan langkah-langkah sebagai berikut:

   $\int (3x+4)^{16}\ dx \ \ = \ldots\ldots$

   ✍ Buat permisalan $u\ dalam\ x$ (tanpa pangkatnya), yaitu $u = 3x + 4$

   ✍ Turunkan $u\ terhadap\ x$, maka $\dfrac{du}{dx} = \ \ldots \qquad \Leftrightarrow dx = \ \ldots\ du$

   ✍ Masukkan (gantikan) bentuk $u\ \ dan\ du$ ke soal, sehingga diperoleh $\int u^{16}\ (\ldots\ \ du) = \ldots$

✍ Sederhanakan bentuk integral tersebut, maka akan diperoleh

$$\int u^{16}\,(\ldots\ du) = \int\ \ldots\ u^{16}\,du = \ldots$$

✍ Hasil akhir integral variabel $u$ diganti lagi dengan $x$, atau $u\ diganti\ dengan\ 3x + 4$, sehingga diperoleh hasil akhir adalah sebagai berikut:

$$\int (3x+4)^{16}\,dx\ = \ldots$$

## Cek Pemahaman

1. Tentukan integral dari $\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx$

Penyelesaian: (menggunakan teorema 3)

Misal $u = 1 - x^2 \Leftrightarrow du = \ \ldots\ dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{du}{\ldots}$

Substitusikan permisalan ke soal $\int 2x\sqrt{1-x}\,dx$, sehingga diperoleh

$\int 2x\sqrt{\ldots}\,\dfrac{du}{\ldots} = \int\ \ldots\ du$ , dengan rumus dasar di dapat hasil integralnya

$= \ldots + C$

Hasil akhir integral $u$ diganti lagi dengan $1 - x^2$, sehingga diperoleh hasil integral:

$\int 2x\sqrt{1-x^2}\,dx = \quad \ldots \quad + C$

2. Tentukan integral dari $\int \dfrac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$

Penyelesaian: (menggunakan teorema 3)

Misal $u = \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow u^2 = 4 - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 4 - \ldots \Leftrightarrow d(u^2) = d(4-x^2)$

$\Leftrightarrow\ \ldots\ du = \ldots\ dx \Leftrightarrow dx = \dfrac{\ldots\ du}{\ldots}$

Substitusikan permisalan ke soal $\int \dfrac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$ , sehingga diperoleh

$\int \dfrac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \dfrac{2(4-\ldots)}{u}\ \dfrac{\ldots\ du}{\ldots}$ , dengan rumus dasar di dapat hasil integralnya

$= \quad \ldots \quad + C$

Hasil akhir integral $u$ diganti lagi dengan $\sqrt{4-x^2}$ , sehingga diperoleh hasil integral:

$$\int \frac{2x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx \;=\; \dots \quad + C$$

3. Tentukan integral dari $\int \cos^2 2x\, dx$

Penyelesaian: (menggunakan teorema 3)

Misal $u = 2x$ silahkan dilanjutkan!

## LEMBAR KERJA-2.1

Tentukanlah setiap integral tak tentu dengan integral subtitusi berikut ini!

1. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$
2. $\int \frac{3dt}{\sqrt{2t+1}}$
3. $\int \frac{1+\cos 2x}{\sin^2 2x}dx$
4. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2-9}}$
5. $\int x(3x+2)^{3/2}dx$
6. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+16}}dx$
7. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{3}dx$
8. $\int \frac{\sin x dx}{16+\cos^2 x}$
9. $\int \cos(2x-4)dx$
10. $\int x\sin(x^2+1)dx$
11. $\int x^2\cos(x^3+1)dx$
12. $\int x(x^2+3)^{-12/7}dx$
13. $\int \frac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x+1}dx$
14. $\int \frac{e^{2x}-e^{-2x}}{e^{2x}+e^{-2x}}dx$
15. $\int \frac{e^{3t}}{\sqrt{4-e^{6t}}}dt$

****OOO****

## 2.2 INTEGRAL PARSIAL (INTEGRAL BAGIAN)

Integral parsial didasarkan pada aturan turunan untuk perkalian dua fungsi. Pada dasarnya integral parsial merupakan teknik substitusi ganda. Banyak digunakan pada pengintegralan yang melibatkan fungsi transenden (logaritma, eksponen, trigonometri beserta inversnya) dan juga perkalian yang melibatkan dua fungsi.

Integral parsial secara umum digunakan untuk menentukan selesaian integral yang integrannya merupakan perkalian dua fungsi $uv,\ dengan\ u = f(x)\ dan\ v = g(x)$.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.2**

**Menemukan rumus integral parsial, sebagai berikut.**

Diketahui suatu perkalian dua fungsi, misal $y = uv$, dengan $u = f(x)\ dan\ v = g(x)$.

Dari $y = uv$, kemudian diferensialkan/turunkan fungsi tersebut terhadap variabel $x$:

$$u = f(x)\ \Longrightarrow \frac{du}{dx} = f'(x) \Longrightarrow du = \ \dots\ \ dx \Longrightarrow du = \cdots\ dx$$

$$v = g(x)\ \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = g'(x) \Longrightarrow dv = \ \dots\ \ dx \Longrightarrow dv = \cdots\ \ dx$$

Sehingga diperoleh: $u = f(x) \Longrightarrow u' = f'(x)$ dan $du = u'dx$

$v = g(x) \Longrightarrow v' = g'(x)$ dan $dv = v'dx$

Untuk fungsi $y = uv = f(x)g(x)$, bila y diturunkan terhadap variabel $x$, diperoleh:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(uv)}{dx} = \frac{d\big(f(x)g(x)\big)}{dx}$$

$$\frac{d(uv)}{dx} = f'(x)\ g(x)\ +\ \dots\ \dots$$

$$d(uv) = (\ f'(x)\ g(x)\ +\ \dots\ \dots\ )\ dx$$

$$d(uv) = (f'(x)\ g(x)\ )\ dx + (\ \dots\ \dots\ )\ dx$$

$$d(uv) = \ u'\ v\ dx\ +\ \ \dots\ \dots\ dx$$

$$d(uv) = \ v\ u'\ dx\ +\ \ \dots\ \dots\ \ dx$$

$$d(uv) = \ v\ du\ +\ \ \dots\ \dots$$

Kemudian kedua ruas diintegralkan,sebagai berikut:

$$\int d(uv) = \int v\ du\ \ +\ \int \dots\ \dots$$

$\ldots \ \ldots \ = \int v\, du \ + \ \int \ldots \ \ldots$

$$\int \ldots \ \ldots \ = \ldots \ldots - \int v\, du$$

Kesimpulan rumus integral parsial adalah:

$$\boxed{\int \ldots \ \ldots \ = \ldots \ldots - \int v\, du}$$

Keterangan:

- $dv$ mudah diintegralkan (menjadi $v$),
- $\int v\, du$ lebih mudah dibandingkan $\int u\, dv$

Dari keterangan tersebut terlihat bahwa rumus integral parsial ditulis dalam bentuk

$\int u\, dv \ = \ \ldots \ \ldots - \int v\, du$ **bukan dalam bentuk** $\int \boldsymbol{v\, du} \ = \ \ldots \ \ldots - \int \boldsymbol{u\, dv}$

Bentuk terakhir ini dinamakan rumus integral parsial. Prinsip yang digunakan dalam integral parsial adalah integran yang berbentu $uv$ dimanipulasi menjadi $u\, dv$ dan dalam menentukan $u\, dv$ tidak boleh memunculkan persoalan yang lebih sulit dibandingkan dengan $\int u\, dv$ tersebut.

## Cek Pemahaman

1. Tentukan integral dari $\int x\, e^{x}\, dx$

***Penyelesaian:***

**INGAT!: Pemilihan $\boldsymbol{u}$ $\boldsymbol{dan\ dv}$ harus tepat, agar mudah diintegralkan**

Misalkan: $u = x \qquad \Longrightarrow du = \ \ldots$

$dv = e^{x}\, dx \qquad \Longrightarrow \ v \ = \int \ \ldots \ \ dx = \cdots$ (tidak perlu penambahan konstanta C, karena konstanta Cdijadikan satu pada hasil akhirnya saja)

Gunakan rumus integral parsialnya:

$$\int u\, dv = \ \ldots \ \ldots \ + \int v\, du$$

***Alternatif lain:*** Bila permisalan diubah bentuk yang lain

Misalkan: $u = e^x$ $\Longrightarrow du = \;...$

$dv = x\,dx \quad \Longrightarrow \; v = \int \;...\; dx = \cdots$

Gunakan rumus integral parsialnya:

$$\int u\,dv = \;...\;...\; + \int v\,du$$

………………………………………….………………………………….

Dari perubahan permisalan seperti yang di atas, kesulitan apa yang Anda temui, sebutkan?

………………………………………….………………………………….

2. Tentukan integral dari $\int \ln x\; dx$

***Penyelesaian:***

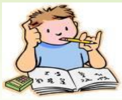
**INGAT!: fungsi yang diintegralkan bukan perkalian dua fungsi, tetapi hanya memuat satu fungsi saja, oleh karena itu pemilihan $\boldsymbol{u\ dan\ dv}$ sudah jelas, yaitu:**

Misalkan: $u = \ln x$ $\Longrightarrow du = \; dx$

$dv = dx \quad \Longrightarrow \; v = \int ...\, dx = \cdots$

Sehingga integral parsialnya menjadi:

..........................................................................................................................



## LEMBAR KERJA-2.2

Tentukanlah setiap integral parsial berikut ini!

1. $\int x^2\, e^{-x}\, dx$
2. $\int e^x \sin x \; dx$
3. $\int x \ln x^2 \; dx$
4. $\int x \sec^2 x \, dx$
5. $\int \sec x \tan x \, dx$
6. $\int arc \cos 2x \, dx$
7. $\int arc \tan x \, dx$
8. $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$
9. $\int x \sqrt[3]{2x+7} \, dx$
10. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+2x}}$ dx
11. $\int x^2\, e^{-2x}$ dx
12. $\int e^x \sqrt{1+x} \; dx$
13. $\int (x-2) \cos (x-2) \, dx$
14. $\int x \, e^{x^2} \, dx$
15. $\int (2x-1)\, e^{1-3x} \, dx$
16. $\int x^3 \sqrt{4-x^2}$ dx
17. $\int \ln 3x$ dx
18. $\int x^2 \sin x$ dx
19. $\int x^2 \sqrt{1-x}$ dx
20. $\int x^2 \sec^2 x \, dx$

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-2.1

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Tentukan integral tak tentu dengan teknik substitusi berikut $\int x^3\sqrt{x^4+11}\, dx$.

   A. $\frac{1}{3}(x^4+11)^{\frac{3}{2}}+C$

   B. $\frac{1}{6}(x^4+11)^{\frac{1}{2}}+C$

   C. $\frac{1}{6}(x^4+11)^{\frac{3}{2}}+C$

   D. $\frac{3}{2}(x^4+11)^{\frac{3}{2}}+C$

   E. $\frac{1}{6}(x^4+11)^{\frac{2}{3}}+C$

2. Tentukan integral tak tentu dengan teknik substitusi berikut $\int (4x+2)\sqrt{4x^2+4x}\; dx$

   A. $\frac{1}{3}\sqrt{(4x^2+4x)^3}+C$

   D. $\frac{2}{3}\sqrt[3]{4x^2+4x}\;+C$

B. $\sqrt{(4x^2+4x)^3}\ +C$

E. $\frac{1}{3}\sqrt{(4x^2+2)^3}\ +C$

C. $\frac{1}{2}\sqrt{(4x^2+4x)^3}\ +C$

3. Tentukan integral tak tentu dengan teknik substitusi berikut $\int \frac{3\, e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\ dx$.

   A. $3\sqrt{1-e^{2x}}+C$

   D. $-\frac{3}{2}\sqrt{1-e^{2x}}+C$

   B. $-3\sqrt{1-e^{2x}}+C$

   E. $5\sqrt{1-e^{2x}}+C$

   C. $\frac{3}{2}\sqrt{1-e^{2x}}+C$

4. Tentukan integral tak tentu dengan teknik substitusi berikut $\int \frac{\sec x \tan x}{\sqrt{1-sec^2 x}}\ dx$.

   A. $arc \tan x + C$

   D. $arc\ tan\ (\sec x) + C$

   B. $arc \tan(\tan x) + C$

   E. $arc \sin(\sec x) + C$

   C. $arc \sec x + C$

5. Tentukan integral parsial berikut $\int arc \tan x\ \ dx$.

   A. $x\ arc \tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

   D. $x\ arc \tan x + \frac{3}{2}\ln(1+x^2)+C$

   B. $arc \tan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$

   E. $arc \tan x - \frac{3}{2}\ln(1+x^2)+C$

   C. $x\ arc \tan x + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C$

6. Tentukan integral parsial berikut $\int x\sqrt{1+x}\ dx$.

   A. $\frac{x}{3}\ \sqrt[3]{1+x} - \frac{4}{15}\ \sqrt[5]{1+x}$ +C

   D. $\frac{2x}{3}\ \sqrt[3]{1+x} + \frac{4}{15}\ \sqrt[5]{1+x}+C$

   B. $\frac{2}{3}\ \sqrt[3]{1+x} - \frac{4}{15}\ \sqrt[5]{1+x}+C$

   E. $\frac{2x}{3}\ \sqrt[3]{1+x} +\ \sqrt[5]{1+x}+\mathrm{C}$

   C. $\frac{2x}{3}\ \sqrt[3]{1+x} - \frac{4}{15}\ \sqrt[5]{1+x}+C$

7. Tentukan integral parsial berikut $\int (x-3)\cos(x-3)\ \ dx$.

   A. $(x-3)\cos(x-3)+\sin(x-3)+C$

   D. $(x-3)\cos(x-3)+\cos(x-3)+C$

   B. $(x-3)\sin(x-3)+\sin(x-3)+C$

   E. $(x-3)\sin(x-3)-\cos(x-3)+C$

   C. $(x-3)\sin(x-3)+\cos\ (x-3)+C$

8. Tentukan integral parsial berikut $\int e^x \cos x\ \ dx$.

   A. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\sin x)+C$

   D. $\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+C$

   B. $\frac{1}{2}e^x(\cos x+\cos x)+C$

   E. $\frac{3}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

   C. $\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

9. Tentukan integral tak tentu berikut dengan teknik substitusi $\int x\sqrt{9-2x^2}\,dx$.

10. Tentukan integral tak tentu berikut dengan teknik substitusi $\int \frac{(6t-1)\sin\sqrt{3t^2-t-1}}{\sqrt{3t^2-t-1}}\,dt$

11. Gunakan pengintegralan parsial dua kali untuk menentukan integral tak tentu berikut: $\int \sin(\ln x)\,dx$

12. Gunakan pengintegralan parsial dua kali untuk menentukan integral tak tentu berikut: $\int e^x\sqrt{1+x}\,dx$

## 2.3 INTEGRAL FUNGSI TRIGONOMETRI

Pada pengintegralan fungsi-fungsi trigonometri, perlu diingat tentang integral dasar fungsi trigonometri yang menjadi acuan untuk menentukan hasil pengintegralan dengan teknik fungsi trigonometri.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.3**

Integral dasar fungsi trigonometri sudah ditemukan di Bab I, Ingatkah integral dasar tersebut, isilah integral dasar berikut ini.

1. $\int \sin x\, dx = \; ... \; + C$
2. $\int \cos x\, dx = \; ... \; + C$
3. $\int \tan x\, dx = \; ... \; + c \; atau \; dalam \; bentuk = \; ... \; + C$
4. $\int \cot x\, dx = \; ... \; + C \; atau \; dalam \; bentuk = \; ... \; + C$
5. $\int \sec x\, dx = \ln( \; ... \; + \; ... \; ) + C$
6. $\int \csc x\, dx = \ln( \; ... \; + \; ... \; ) + C$

Berdasarkan integral dasar di atas, selanjutnya diberikan beberapa kasus bentuk integral fungsi trigonometri yang dibahas, sebagai berikut.

***2.3 1 KASUS 1: Bentuk*** $\int \sin^n x\, dx$ ***dan*** $\int \cos^n x\, dx$ ***dengan n*** $\in$ ***N, n bilangan ganjil***

Jika n bilangan bulat positif ganjil: Integran dituliskan sebagai perkalian fungsi trigonometri berpangkat genap dan fungsi trigonometri berpangkat satu, kemudian mensbstitusikan identitas trigonometri: $sin^2\, x + cos^2 x = 1 \;\; atau \; sin^2\, x = 1 - cos^2 x \;\; atau \; cos^2 x = 1 - sin^2 x$.

Bentuk $\int \sin^n x\, dx$ ***dan*** $\int \cos^n x\, dx$ ***dengan n*** $\in$ ***N, n bilangan ganjil*** dengan cara sebagai berikut:

1. $\int sin^n x\, dx = \int sin^{n-1} x\, sinx\, dx = \int (sin^2 x)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin x\, dx$

Dengan (n-1) = bilangan genap dan berpangkat satu, kemudian substitusikan identitas trigonometri pada trigonometri yang berpangkat genap dan gunakan permisalan trigonometri yang berpangkat satu, maka diperoleh kesamaan antara integran dengan tanda integrasinya, sehingga dengan mudah dapat diintegralkan untuk memperoleh selesaiannya.

Dengan substitusi $sin^2 x = 1 - cos^2 x$ ,

Dimisalkan $u = \cos x \to du = -\sin x \, dx$

$\int (sin^2 x)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin x \, dx = \int (1 - cos^2 x)^{\frac{1}{2}(n-1)} \sin x \frac{du}{-\sin x} = -\int (1 - u^2)^{\frac{1}{2}(n-1)} du$ dst.

Sehingga semua variabel bentuk u dan diintegralkan ke u, terakhir u diganti dengan permisalah awal. Diperolehlan hasil akhirnya.

2. $\int cos^n x \, dx = \int cos^{n-1} x \cos x \, dx$, dengan cara yang sama seperti pada integral sin x.

## Cek Pemahaman

1. Tentukan integral dari $\int sin^3 x \, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Ubahlah $sin^3 x$ menjadi pangkat genap dan pangkat 1, sebagai berikut:

     $\int sin^3 x \, dx = \int \quad ... \quad\quad ... \quad dx$

   - Pada trigonometri berpangkat genap substitusikan identitas trigonometri $sin^2 x = 1 - cos^2 x$ , dan gunakan permisalan $u = \sin x$ (trigonometri yang berpangkat 1), diperoleh:

     ........................................................................................

2. Tentukan integral dari $\int cos^5 x \, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Ubahlah $cos^5 x$ menjadi pangkat genap dan pangkat 1, sebagai berikut:

     $$\int cos^5 x \, dx = \int \quad ... \quad\quad ... \quad dx$$

   - Pada trigonometri berpangkat genap substitusikan identitas trigonometri $cos^2 x = 1 - sin^2 x$ , kemudian gunakan permisalan $u = \cos x$ (trigonometri yang berpangkat 1), diperoleh:

     ........................................................................................

### 2.3.2 KASUS 2: Bentuk $\int \sin^n x\, dx$ dan $\int \cos^n x\, dx$ dengan n ∈ N, n bilangan genap

Bentuk $\int \cos^n xdx$, $\int \sin^n dx$, jika n bilangan bulat positip genap, selesaiannya dapat dilakukan dengan menggunakan substitusi kesamaan identitas trigonomteri setengah sudut $\cos 2x = cos^2 x - sin^2 x,\ sehingga\ sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\ \ atau\ cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

**Cek Pemahaman**

3. Tentukan integral dari $\int sin^2 x\, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Ubahlah $sin^2 x$ dengan cara mensubstitusikan kesamaan identitas trigonomteri setengah sudut $sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, maka akan dengan mudah dapat diintegralkan:

     ………………………………………………………………………………………

     ………………………………………………………………………………………

4. Tentukan integral dari $\int cos^4 x\, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Ubahlah $cos^4 x = (cos^2 x)^2$ dengan cara mensubstitusikan kesamaan identitas trigonomteri setengah sudut $cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, maka akan dengan mudah dapat diintegralkan:

     ………………………………………………………………………………………

     ………………………………………………………………………………………

5. Tentukan integral dari $\int sin^4 2x\, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Gunakan misaln $u = 2x \to du = \cdots\ \ dx \to dx = \frac{du}{\cdots}$, Kemudian kerjakan seperti soal nomor 4 di atas:

…………………………………………………………………………………………...

………………………………………………………………………………………

### 2.3.3 KASUS 3: Bentuk $\int sin^m x\, cos^n x\ dx,\ dengan\ m, n\ \in N$

Jika m atau n bilangan bulat positip ganjil, sedangkan lainnya sebarang bilangan, maka faktorkan $\sin x$ atau $\cos x$ dengan menggunakan kesamaan identintas $sin^2x + cos^2x = 1$ dengan terlebih dahulu mengubah salah satu bilangan ganjil. Misal m ganjil maka ubah m dengan m = (m-1)+1 , jika n ganjil diubah menjadi (n-1)+1.

Jika m dan n genap digunakan kesamaan setengah sudut $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ dan $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ sehingga diperoleh hasil pengintegralannya.

**Cek Pemahaman**

1. Tentukan integral dari $\int sin^3x\, cos^2x\, dx$

   ***Penyeelsaian:***

   - Ubahlah pangkat ganjil menjadi $sin^3x = sin^2x \sin x$ menjadi pangkat genap dan pangkat 1, dalam bentuk $\int sin^3x\, cos^2x\, dx = \int sin^2x\ \sin x\ cos^2x\, dx$
   - Gantilah $sin^2\, x = 1 - cos^2x$ , sehingga semuanya berubah dalam bentuk $\cos x$, kemudian misalkan $\sin x = u \to du = \ \ldots\ \ dx\ \ \to dx = \frac{du}{\ldots}$ , maka akan diperoleh bentuk yang dengan mudah dapat diintegralkan:

     ………………………………………………………………………………………

     ………………………………………………………………………………………

2. Tentukan integral dari $\int sin^{-4}x\, cos^3x\, dx$

   ***Penyelesaian:***

   - Kerjakan seperti soal nomor 1:

     ………………………………………………………………………………………

     ………………………………………………………………………………………

3. Tentukan integral dari $\int sin^2x\, cos^2x\, dx$

***Penyelesaian:***

➢ Karena keduanya pangkat genap, maka ubahlah $sin^2x = \frac{1-\cos\ 2x}{2}$ dan $cos^2x = \frac{1+\cos 2x}{2}$, kemudian disederhanakan sehingga diperoleh hasil pengintegralannya.

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

4. Tentukan integral dari $\int sin^4x\, cos^4x\, dx$

***Penyelesaian:***

➢ Kerjakan seperti soal nomor 3, selamat mengerjakan!

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………

### 2.3.4 *KASUS 4: Bentuk* $\int \boldsymbol{tan^n\ x\, dx\ \ dan\ \int cot^n x\ ,\ dengan\ \ n\ \in N}$

Dalam kasus ini jika n genap gunakan kesamaan identitas $sec^2x = 1 + tan^2x$ dan $csc^2x = 1 + cot^2x$. Tetapi jika n bilangan ganjil, maka ubahlah menjadi pangkat genap dan pangkat 1, kemudian yang pangkat genap substitusikan $sec^2x = 1 + tan^2x$ atau $csc^2x = 1 + cot^2x$.

**Cek Pemahaman**

1. Tentukan integral dari $\int tan^3x\, dx$

***Penyelesaian:***

- Ubahlah $tan^3x$ menjadi pangkat genap dan pangkat 1, sebagai berikut:

  $\int tan^3x\, dx = \int tan^2x \tan x\, dx$

- Pada trigonometri berpangkat genap substitusikan identitas trigonometri $sec^2x = 1 + tan^2x \rightarrow tan^2x = sec^2x - 1$, dan gunakan permisalan $u = \tan x$, kemudian diperoleh hasil pengintegralannya.

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

2. Tentukan integral dari $\int cot^4x\, dx$

***Penyelesaian:***

- Ubahlah $cot^4x = (cot^2x)(\,cot^2x)$, sehingga menjadi:

  $$\int cot^4x\, dx = \int (cot^2x)(\,cot^2x)\, dx$$

- Substitusikan identitas trigonometri $csc^2x = 1 + cot^2x \rightarrow cot^2x = csc^2x - 1$, kemudian disederhanakan sehingga diperoleh hasil pengintegralannya.

  ………………………………………………………………………………………

  ………………………………………………………………………………………

### 2.3.5 *KASUS 5: Bentuk* $\int \boldsymbol{tan^m\, x\, sec^nx\, dx}$ $\boldsymbol{dan}$ $\int \boldsymbol{cot^mx\, csc^nx\, dx}$ , $\boldsymbol{dengan}$ $\boldsymbol{m, n \in N}$

Bentuk ini mempunyai dua kasus yaitu n bilangan genap m sebarang atau m bilangan ganjil n sebarang. Jika n bilangan genap dan m sebarang gunakan kesamaan $sec^2x = 1 + tan^2x$ dan $csc^2x = 1 + cot^2x$.

**Cek Pemahaman**

1. Tentukan integral dari $\int tan^5x\, sec^4x\, dx$

***Penyelesaian:***

- Ubahlah $sec^4x = sec^2x\ sec^2x,$ kemudian $sec^2x$ yang pertama gantilah dengan identitas trigonometri $sec^2x = 1 + tan^2x$ , dan gunakan permisalan $u = sec^2\ x$, atau dengan mengingat $d \tan x = sec^2x\ dx$.
  sehingga: $\int tan^5x\ sec^2x\ sec^2x\ dx = \int tan^5x\ (1 + tan^2x)\ sec^2x\ dx$
  kemudian disederhanakan sehingga diperoleh hasil pengintegralannya.
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………

2. Tentukan integral dari $\int cot^{-5}x\ csc^4x\ dx$

***Penyelesaian:***

- Kerjakan seperti soal nomor 1.
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………
  ……………………………………………………………………………………

Sedangkan $\int \boldsymbol{tan^m\ x\ sec^n x\ dx\ \ dan\ \int cot^m x\ csc^n x\ dx}$, untuk m bilangan ganjil dan n sebarang, maka integral akan mudah diselesaikan bila digunakan bentuk $d \sec x = \sec x \tan x\ dx\ \ dan\ d \csc x = -\csc x \cot x\ dx$ dan juga menggunakan substitusi kesamaan identitas $tan^2x = sec^2x - 1$ dan $cot^2x = csc^2x - 1$.

## Cek Pemahaman

3. Tentukan integral dari $\int tan^5x\ sec^{-2}x\ dx$

***Penyelesaian:***

- Ubahlah $tan^5x\ sec^{-2}x = tan^4x \tan x\ sec^{-3}x \sec x = tan^4x\ sec^{-3}x\ \tan x \sec x,$
  Sehingga akan diperoleh bentuk $\tan x \sec x$, maka bentuk integral menjadi
  $\int tan^5x\ sec^{-2}x\ dx = \int tan^4x sec^{-3}x\ \tan x \sec x\ dx$, kemudian gunakan permisalan $u = \sec x$. Dengan mudah diperoleh hasil pengintegralannya.
  ……………………………………………………………………………………

4. Tentukan integral dari $\int cot^3 x\ csc^{-4} x\ dx$

***Penyelesaian:***

- Kerjakan seperti soal nomor 3.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

### 2.3.6 KASUS 6: Bentuk $\int \sin mx \cos nx\ dx$ , $\int \sin mx \sin nx\ dx$ , dan $\int \cos mx \cos nx\ dx$

Bentuk di atas diselesaikan dengan mengubah integran ke dalam bentuk penjumlahan atau pengurangan , dengan mengingat identitas trigonometri sebagai berikut:

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)\,x + \sin(m-n)\,x]$$

$$\sin mx \sin nx = -\frac{1}{2}[\cos(m+n)\,x - cos\,(m-n)\,x]$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)\,x + cos\,(m-n)\,x]$$

**Cek Pemahaman**

1. Tentukan integral dari $\int \sin 3x \cos 4x\ \ dx$

***Penyelesaian:***

- Ubahlah dengan menggunakan identitas trigonometri di atas, maka dengan mudah diperoleh hasil pengintegralannya.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

2. Tentukan integral dari $\int \sin 5x \sin 4x\ \ dx$

***Penyelesaian:***

- Kerjakan seperti soal nomor 1.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

3. Tentukan integral dari $\int \cos 5x \cos 4x \ dx$

***Penyelesaian:***

- Kerjakan seperti soal nomor 2.

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

## LEMBAR KERJA-2.3

Tentukanlah setiap integral fungsi trigonometri berikut ini!

1. $\int \sin^4\left(\frac{x}{2}\right)dx$
2. $\int \cos^3\left(\frac{2x}{5}\right)dx$
3. $\int \sin^2(2x)\cos^4(2x)dx$
4. $\int \sin^3\left(\frac{x}{5}\right)\cos^3\left(\frac{x}{5}\right)dx$
5. $\int \sin^{\frac{1}{2}} 3x \cos^3 3x \, dx$
6. $\int (\sin^3 2t)\sqrt{\cos 2t} \ dt$
7. $\int \cot^4(3x)dx$
8. $\int \cot x \csc^4 x \ dx$
9. $\int \tan 2x \sec^2 2x dx$
10. $\int \csc^4 4y \ dy$
11. $\int \tan^{-4} q \sec^2 q \ dq$
12. $\int \cos 2x \sin 3x \ dx$

13. $\int \cot^4\left(\frac{x}{3}\right) dx$

14. $\int \sin^{\frac{1}{2}} z \cos^3 z \; dz$

15. $\int \tan^5 x \sec^{-3/2} x \; dx$

****OOO****

## 2.4 INTEGRAL SUBSTITUSI FUNGSI TRIGONOMETRI

Untuk menyelesaikann integral yang memuat bentuk akar kuadrat seperti berikut: $\sqrt{a^2-x^2}$ , $\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2+x^2}$ , dan $\sqrt{x^2-a^2}$ , a $\in$ Real atau bentuk lain yang dapat diubah menjadi bentuk sepertidi atas, misalnya: $\sqrt{a^2-b^2x^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - x^2}$ , $\sqrt{a^2+b^2x} = \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + x^2}$ , dan $\sqrt{a^2x^2-b^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ atau $\sqrt{ax^2+bx+c}$ yang dapat diubah menjadi bentuk kuadrat sempurna. Bila memuat bentuk-bentuk seperti di atas, maka diperlukan substitusi trigonometri, agar bentuk akarnya tereliminasi. Setelah vaiabelnya diganti dengan fungsi trigonometri yang sesuai, maka bentuknya menjadi fungsi trigonometri yang dapat diselesaikan dengan rumus reduksi, dengan langkah-langkah sebagai berikut:

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.4**

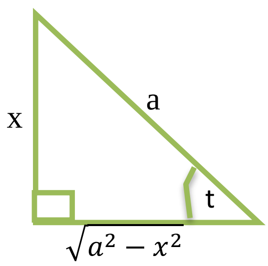
1. Jika memuat bentuk $\sqrt{a^2-x^2}$, maka untuk mengeliminasi bentuk akar digunakan substitusi $x = a\sin t$ , $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ , $maka\ dx = a \quad \ldots \quad dt$

   Dengan mensubstusikan $sin^2t + cos^2t = 1 \rightarrow cos^2t = 1 - sin^2t$.

   Sehingga bentuk akar menjadi:

   $\sqrt{a^2-(a\sin t)^2} = \sqrt{a^2(1-sin^2t)} = a\sqrt{\quad \ldots \quad} = a \quad \ldots$

   Dari permisalan $x = a\sin t \rightarrow \sin t = \frac{x}{a}$, sehingga untuk menentukan perbandingan trigonometri yang lain dapat dicari melalui gambar sebagai berikut:




Dapat dicari perbandingan trigonometri yang lain:

$\sin t = \frac{x}{a} \rightarrow t = \quad \ldots$

$\cos t = \quad \ldots$ , $\tan t = \quad \ldots$

Ingat: Identitas trigonometri
$1 + tan^2 t = sec^2 t \ \ atau \ tan^2 t = sec^2 t - 1$

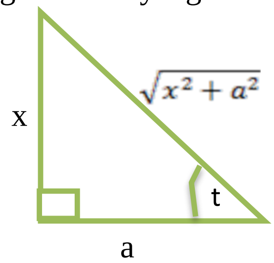
2. Jika memuat bentuk $\sqrt{a^2 + x^2}$, maka untuk mengeliminasi bentuk akar digunakan substitusi $x = a\tan x$ , $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \to dx =$ ...

   Dengan mensubstusikan ... + ... = ...

   Sehingga bentuk akar menjadi:

   $\sqrt{a^2 + (\quad \dots \quad)^2} = \sqrt{a^2(1 - \quad \dots \quad)} = a\sqrt{\quad \dots \quad} = a \ \ \dots$

   Dari permisalan $x = a\tan t \ \to \tan t = \frac{x}{a}$, sehingga untuk menentukan perbandingan trigonometri yang lain dapat dicari melalui gambar sebagai berikut:




Dapat dicari perbandingan trigonometri yang lain:

$\tan t = \frac{x}{a} \to t =$ ...

$\cos t =$ ... , $\sin t =$ ...

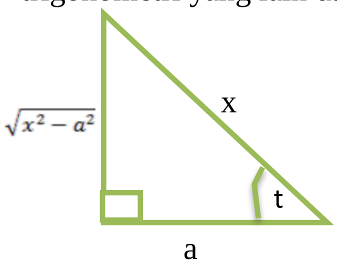
3. Jika memuat bentuk $\sqrt{x^2 - a^2}$, maka untuk mengeliminasi bentuk akar digunakan substitusi $x = a\sec x$ , $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \to dx =$ ...

   Dengan mensubstusikan ... + ... = ...

   Sehingga bentuk akar menjadi:

   $\sqrt{(\quad \dots \quad)^2 - a^2} = \sqrt{a^2(\quad \dots \quad - 1)} = a\sqrt{\quad \dots \quad} = a \ \ \dots$

   Dari permisalan $x = a\sec t \ \to \sec t = \frac{x}{a}$, sehingga untuk menentukan perbandingan trigonometri yang lain dapat dicari melalui gambar sebagai berikut:




Dapat dicari perbandingan trigonometri yang lain:

$\sec t = \frac{x}{a} \to t =$ ...

$\cos t =$ ... , $\sin t =$ ...

## Cek Pemahaman

1. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \sqrt{x^2 - 9}\ dx$

   ***Penyelesaian:***

   Kerjakan sesuai dengan bentuk akarnya!

2. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+9}}$

   ***Penyelesaian:***

   Kerjakan sesuai dengan bentuk akarnya!

3. Tentukan hasil integal tak tentu $\int \frac{\sqrt{x^2-9}}{x}\ dx$

   ***Penyelesaian:***

   Kerjakan sesuai dengan bentuk akarnya!

4. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-8}}$

***Penyelesaian:***

Bentuk akarnya ubah menjadi bentuk akar dalam kuadrat sempurna terlebih dahulu, agar dapat diselesaikan seperti bentuk akar di atas!

## LEMBAR KERJA-2.4

Tentukanlah setiap integral tak tentu dengan subtitusi trigonometri berikut ini!

1. $\int \frac{dx}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
2. $\int \frac{\sqrt{25-x^2}}{x}\, dx$
3. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$
4. $\int x^2\sqrt{3-x^2}\, dx$
5. $\int \frac{dx}{(9+x^2)^2}$
6. $\int \sqrt{3+x^2}\ dx$
7. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\, dx$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+13}}$
9. $\int \frac{3xdx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$

10. $\int \frac{t}{\sqrt{t^2+4}}dt$

11. $\int \sqrt{x^2-1}\, dx$ dx

12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-25}}$

13. $\int \frac{\sqrt{t^2-4}}{t^3}dt$

14. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-6}}$

15. $\int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-1}}$

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-2.2

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int \sin^5(2x)\, dx$

A. $\cos 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

B. $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

C. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \sin^3 2x - \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

D. $-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{3}\sin^3 2x + \frac{1}{10}\sin^5 2x + C$

E. $-\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos^3 2x - \frac{1}{10}\cos^5 2x + C$

2. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int cos^3 3x\; sin^{-2} 3x\; dx$.

A. $-\frac{1}{3} secan\ 3x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$

B. $-\frac{1}{3} cosec\ 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$

C. $\frac{1}{3} cosec\ 3x + \frac{1}{3}\sin 3x + C$

D. $-\frac{1}{3} secan\ 3x - \frac{1}{3}\sin 3x + C$

E. $-\frac{2}{3} cosec\ 3x - \frac{2}{3}\sin 3x + C$

3. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int tan^{-4}x\ sec^2x\ dx$.

A. $-\frac{1}{3}tan^3x + \frac{1}{3}\tan 3x + C$

B. $-\frac{1}{3}cot^3x + C$

C. $\frac{1}{3}tan^3x + \tan x + C$

D. $-\frac{2}{3}tan^3x + C$

E. $-\frac{2}{3}tan^3x + \tan x + C$

4. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int (\tan x + \cot x)^2\ dx$.

A. $\tan x + 2\cot x + C$

B. $2\tan x - \cot x + C$

C. $\tan x - \cot x + C$

D. $\tan x + \cot x + C$

E. $\tan x - 2\cot x + C$

5. Tentukan integral tak tentu berikut dengan subtitusi fungsi trigonometri $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - x^2}}$

A. $2\ arc\sin\ (\frac{x-2}{2}) + C$

B. $arc\sin\ (\frac{x-2}{2}) + C$

C. $arc\cos\ (\frac{x-2}{2}) + C$

D. $\frac{1}{2}arc\sin\ (\frac{x-2}{2}) + C$

E. $arc\sin 2\ (\frac{x-2}{2}) + C$

6. Tentukan integral tak tentu berikut dengan subtitusi fungsi trigonometri $\int \frac{dx}{\sqrt{16 + 6x - x^2}}$

A. $arc\sin\ (\frac{x-3}{5}) + C$

B. $5\ arc\sin\ (\frac{x-3}{5}) + C$

C. $arc\cos\ (\frac{x-3}{5}) + C$

D. $\frac{1}{5}arc\sin\ (\frac{x-3}{5}) + C$

E. $arc\sin\ 5\ (\frac{x-3}{5}) + C$

7. Tentukan integral tak tentu berikut dengan subtitusi fungsi trigonometri $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\ dx$.

A. $\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| - \sqrt{4-x^2} + C$

B. $2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| - 2\sqrt{4-x^2} + C$

C. $\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$

D. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| - \sqrt{4-x^2} + C$

E. $2\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2} + C$

8. Tentukan integral tak tentu berikut dengan subtitusi fungsi trigonometri $\int \frac{y^3}{(y^2+9)^{\frac{3}{2}}}\ dy$.

A. $\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{\sqrt{y^2}+9} + C$

B. $\ln\sqrt{y^2+9} + \frac{9}{\sqrt{y^2}+9} + C$

D. $\sqrt{y^2+9} - \frac{9}{\sqrt{y^2}+9} + C$

E. $\sqrt{y^2+9} - \frac{1}{\sqrt{y^2}+9} + C$

C. $2\sqrt{y^2+9}+\frac{9}{\sqrt{y^2+9}}+C$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

9. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int sin^4 3x\ cos^4 3x\ dx.$
10. Tentukan integral fungsi trigonometri berikut $\int \cos y \cos 4y\ dy$
11. Tentukan integral tak tentu berikut deng subtitusi fungsi trigonometri $\int \frac{3x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\ dx.$
12. Tentukan integral tak tentu berikut deng subtitusi fungsi trigonometri $\int x^2\sqrt{3-x^2}$ dx

****OOO****

## 2.5 INTEGRAL FUNGSI RASIONAL

Menurut definisi, fungsi rasional adalah suatu fungsi dari hasil bagi dua fungsi suku banyak (polinomial). Bentuknya: $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x)\neq 0$, dimana $P(x)$ & $Q(x)$ merupakan fungsi suku banyak (polinomial).

Jika derajat P lebih besar atau sama dengan derajat Q, maka dengan cara operasi pembagian biasa, fungsi rasional F dapat ditulis dalam bentuk: $F(x) = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)}$ , Q(x)≠0, dengan $H(x)$ menyatakan hasil bagi dan $S(x)$ sisa pembaginya yang derajatnya lebih kecil dari derajat Q.

Dalam menentukan integral fungsi rasional $F(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, $Q(x)\neq 0$, dengan menggunakan teorema dasar aljabar yang menyatakan bahwa penyebut dapat diuraikan atas factor linear atau kuadrat definit positif, berariti ada empat kasus, yaitu sebagai berikut:

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.5**

### 2.5.1 <u>KASUS I: SEMUA FAKTOR DARI $Q(x)$ LINEAR DAN BERBEDA</u>

Dalam hal ini jika derajat $Q(x) = n$, maka $Q(x)=(x-x_1)(x-x_2).......(x-x_n)$ dengan $x_1, x_2, x_3,\ \ ...\ \ , x_n$ semuanya berbeda.

Langkah penyelesaian:

1. Tuliskan fungsi $F(x)$ menjadi bentuk pecahan bagian dari faktor linear yang berbentuk:
$$F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{x-x_2}+...+\frac{A_n}{x-x_n}$$
2. Tentukan nilai $A_1$, $A_2$, ... ,$A_n$ dengan cara menyamakan penyebut di ruas kanan dan sifat kesamaan dua suku banyak.
3. Berdasarkan kombinasi faktor dari penyebut pada integran, maka hasil integralnya dapat ditentukan dengan menggunakan metode sebelumnya setelah diperoleh masing-masing konstanta.
4. Untuk lebih jelasnya cek pemahaman pada soal di bawah ini.

## Cek Pemahaman

1. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{x^5+3}{x^3-x}dx$, fungsi rasional tidak sejati!

***Penyelesaian ikuti langkah-langkah berikut ini:***

1. Tentukan hasil bagi (H(x)) dan sisa pembagian (S(x)).

$$\frac{x^5+3}{x^3-x} = H(x) + \frac{S(x)}{Q(x)} = \quad \ldots \quad + \frac{\ldots}{x^3-x} = \int H(x)\,dx + \int \frac{\ldots}{x^3-x}dx$$

2. Untuk integral H(x) integralkan seperti rumus sebelumnya, sedangkan untuk integral sisa pembagian, yaitu $\int \frac{\ldots}{x^3-x}dx$, faktorkan penyebutnya, sebagai berikut:

$$\int \frac{\ldots}{x^3-x}dx = \int \frac{\ldots}{x(x^2-\ldots)}dx = \int \frac{\ldots}{x(x-\ldots)(x+\ \ldots\ )}dx$$

3. Tulislah fungsi integran di atas menjadi pecahan bagian yang berbentuk

$$\frac{\ldots}{x(x-\ldots)(x+\ \ldots\ )} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-\ldots)} + \frac{A_3}{(x+\ldots)}$$

4. Tentukan nilai–nilai $A_1, A_2, A_3$ dengan menyamakan penyebut di ruas kanan, sifat kesamaan dua suku banyak.

$$\frac{\ldots}{x(x-\ldots)(x+\ \ldots\ )} = \frac{A_1\,x(x-\ldots)(x+1) + A_2\ x(x+\ \ldots) + A_3\,x(x-\ \ldots)}{x(x-\ldots)(x+\ \ldots\ )}$$

5. Hitung integral dari setiap pecahan bagian di ruas kanan

$$\int \frac{\ldots}{x^3-x}dx = \int \frac{\ldots}{x(x-\ldots)(x+\ \ldots\ )}dx = \int [\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{(x-\ldots)} + \frac{A_3}{(x+\ldots)}]dx$$

2. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{x+1}{x-1}dx$, fungsi rasional tidak sejati!

***Penyelesaian:***

Kerjakan seperti langkah-langkah pada soal nomor 1 di atas!

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………

## 2.5.2 KASUS II : SEMUA FAKTOR DARI $Q(x)$ LINEAR BERBEDA DAN ADA YANG TERULANG

Pada kasus II ini faktor dari $Q(x)$ terdiri dari faktor linear berbeda dan ada yang terulang. Untuk faktor linear yang berbeda diselesaikan seperti pada kasus I. Sedangkan faktor yang terulang (sama), maka dijadikan pecahan bagian sebanyak terulangnya. Misalkan faktor linear $x_k$ terulang sebanyak r kali, maka pecahan bagian untuk faktor ini adalah :

$$\frac{B_1}{x-x_k}+\frac{B_2}{(x-x_k)^2}+....+\frac{B_r}{(x-x_k)^r}$$

Langkah-langkah penyelesaian sebagai berikut:

1. Untuk faktor linear yang berbeda selesaikan seperti kasus I.
2. Untuk faktor linear yang terulang (sama) tuliskan menjadi bentuk pecahan bagian,

   seperti berikut: $\frac{B_1}{x-x_k}+\frac{B_2}{(x-x_k)^2}+....+\frac{B_r}{(x-x_k)^r}$
3. Tentukan nilai $B_1$, $B_2$, ... ,$B_r$ dengan cara menyamakan penyebut di ruas kanan dan sifat kesamaan dua suku banyak.
4. Untuk lebih jelasnya cek pemahaman pada soal di bawah ini.

**Cek Pemahaman**

3. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} dx$ , fungsi rasional sejati!

   Penyelesaian ikuti langkah-langkah berikut ini:

   1. Tulislah fungsi integran di atas menjadi pecahan bagian yang berbentuk:

      $$\frac{3x^2 - 8x + 13}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{B_1}{x+3} + \frac{B_2}{(x-1)} + \frac{B_3}{(x-1)^2}$$

   2. Tentukan nilai–nilai $B_1, B_2, B_3$ dengan menyamakan penyebut di ruas kanan, sifat kesamaan dua suku banyak.

      ……………………………………………………………………………………

   3. Hitung integral dari setiap pecahan bagian di ruas kanan adalah:

      ……………………………………………………………………………………

      ……………………………………………………………………………………

      ……………………………………………………………………………………

### 2.5.3 KASUS III: FAKTOR $Q(x)$ MEMUAT BENTUK KUADRAT DEFINIT POSITIF YANG TAK TERULANG

Pada kasus III ini faktor dari $Q(x)$ memuat faktor kuadrat definit positif, misal $x^2 + px + q = 0, dimana\ D < 0\ atau\ p^2 - 4q < 0,$ maka bentuk pecahan untuk faktor ini adalah: $\frac{Ax + B}{x^2 + px + q}$. Langkah-langkah penyelesaian seperti kasus I dan II.

**Cek Pemahaman**

4. Tentukan hasil integral tak tentu $\int \frac{(x-6)dx}{(x+1)(x^2 - 2x + 2)}$, fungsi rasional sejati!

   ***Penyelesaian ikuti langkah-langkah berikut ini:***

1. Tulislah fungsi integran di atas menjadi pecahan bagian yang berbentuk:

$$\frac{(x-6)}{(x+1)(x^2-2x+2)}=\frac{B_1}{x+1}+\frac{B_2\,x+B_3}{x^2-2x+2}$$

2. Tentukan nilai–nilai $B_1, B_2, B_3$ dengan menyamakan penyebut di ruas kanan, sifat kesamaan dua suku banyak.

   ………………………………………………………………………………

3. Hitung integral dari setiap pecahan bagian di ruas kanan adalah:

   ………………………………………………………………………………

### 2.5.4 KASUS III: FAKTOR $Q(x)$ MEMUAT BENTUK KUADRAT DEFINIT POSITIF YANG TERULANG

Pada kasus IV ini faktor dari $Q(x)$ memuat faktor kuadrat definit positif, misal $x^2+px+q=0, dimana\ D<0\ atau\ p^2-4q<0$ terulang sebanyak m kali, maka bentuk pecahan bagian untuk faktor ini adalah $\frac{A_1x+B_1}{x^2+px+q}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+px+q)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+px+q)^3}+\ ...\ +\frac{A_mx+B_m}{(x^2+px+q)^m}$ Langkah penyelesaiannya seperti kasus I, II dan III.

**Cek Pemahaman**

5. Tentukan hasil integral tak tentu berikut $\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{X(x^2+1)^2}\,dx.$

   ***Penyelesaian ikuti langkah-langkah berikut ini:***

1. Tulislah fungsi integran di atas menjadi pecahan bagian yang berbentuk:

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}=\frac{B_1}{x}+\frac{B_2x+B_3}{x^2+1}+\frac{B_4x+B_5}{(x^2+1)^2}+$$

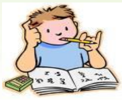
2. Tentukan nilai–nilai $B_1, B_2, B_{3\,,}B_4, B_5$ dengan menyamakan penyebut di ruas kanan, sifat kesamaan dua suku banyak.

   ………………………………………………………………………………

3. Hitung integral dari setiap pecahan bagian di ruas kanan adalah:

   ………………………………………………………………………………

   ………………………………………………………………………………



# LEMBAR KERJA-2.5

Tentukanlah setiap integral fungsi rasional berikut ini!

1. $\int \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}dx$

2. $\int \frac{x^2-3x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

3. $\int \frac{2x^3}{x^2-x-2}dx$

4. $\int \frac{x^6+4x^3+4}{x^3-4x^2}\,\mathrm{dx}$

5. $\int \frac{x+1}{(x-3)^2}dx$

6. $\int \frac{x^6}{(x-2)^2(1-x)^5}dx$

7. $\int \frac{x^2+19x+10}{2x^4+5x^3}dx$

8. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

9. $\int \frac{x^3-8x^2-1}{(x+3)(x-2)(x^2+1)}dx$

10. $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}dx$

11. $\int \frac{x^3-4x}{(x^2+1)}dx$

12. $\int \frac{2x^3+5x^2+16x}{x^5+8x^3+16}dx$

13. $\int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2}dx$

14. $\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+1)^2}\,dx$

15. $\int \frac{x^3+x^2-5x+15}{(x^2+5)(x^2+2x+3)}\,dx$

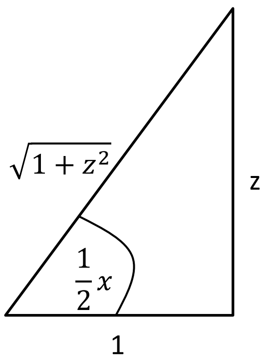
****OOO****

## 2.6 INTEGRAL FUNGSI RASIONAL TRIGONOMETRI

Fungsi F(x) = $\frac{f(x)}{g(x)}, g(x) \neq 0$, $f(x)$ dan g(x) memuat fungsi trigonometri maka disebut fungsi rasional trigonometri (dalam sin x, cos x). Hanya saja tidak dapat disebut fungsi rasional sejati atau tidak sejati. Hal ini dikarenakan f(x) = sin x dan f(x) = cos x tidak mempunyai derajat seperti halnya dengan fungsi polinomial. Pengintegralan jenis ini menggunakan **Metode Substitusi**.

### BAHAN DISKUSI SECARA KOLABOASI-2.6

Fungsi rasional dalam sin x dan cos x atau R (sin x, cos x), maka $\int R(\sin x, \cos x)$ dapat dijadikan integral fungsi rasional dalam z dengan menggunakan substitusi $z = \tan\frac{1}{2}x \ \rightarrow \frac{1}{2}x = arc\tan z \rightarrow x = 2\, arc\tan z \rightarrow dx = \frac{2}{1+z^2}\, dz$, selanjutnya dapat dicari sin x dan cos x, sebagai berikut.




$z = \tan\frac{1}{2}x \rightarrow \tan\frac{1}{2}x = \frac{z}{1}$, sehingga dari gambar di samping diperoleh:

$$\sin\frac{1}{2}x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\ , dan \cos\frac{1}{2}x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\sin x = \sin 2(\frac{1}{2}x) = 2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x = 2\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

Jadi $\sin x = \frac{\dots}{1+z^2}$ , dan

$$\cos x = \cos 2(\frac{1}{2}x) = cos^2\frac{1}{2}x - sin^2\frac{1}{2}x = \frac{\dots}{\dots}$$

### Cek Pemahaman

1. Tentukan hasil integral fungsi rasional trigonometri berikut: $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

***Penyelesaian:***

- Gantilah integran fungsi rasional trigonometri menjadi fungsi rasional dalam variabel z, dengan menggunakan substitusi sebagai berikut:

$$z = \tan\frac{1}{2}x \to dx = \frac{2}{1+z^2}\,dz, \sin x = \frac{\dots}{1+z^2}\ dan\ \cos x = \frac{\dots}{\dots}$$

- Setelah menjadi fungsi rasional dalam variabel z, maka selesaikan seperti point 2.5 pada materi sebelumnya.

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………

## LEMBAR KERJA-2.6

Tentukanlah setiap integral fungsi rasional berikut ini!

1. $\int \frac{dx}{3+5\sin x} =$
2. $\int \frac{dx}{1-2\sin x}$
3. $\int \frac{dx}{2+\sin x}$
4. $\int \frac{dx}{5+3\sin x}$
5. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$
6. $\int \frac{dx}{2+\cos x}$
7. $\int \frac{dx}{3-2\sin x}$

8. $\int \frac{(2+\tan^2 x)\sec^2 x dx}{1+\tan^2 x}$

9. $\int \tan x\, dx$

10. $\int \cot x\, \mathrm{dx}$

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-2.3

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{17x-3}{3x^2+x-2}\ dx.$

   A. $\frac{3}{5}\ln|3x-2| - 4\ln|x+1| + C$

   B. $\frac{5}{3}\ln|3x-2| - \frac{3}{5}\ln|x+1| + C$

   C. $\frac{5}{3}\ln|3x-2| + 4\ln|x+1| + C$

   D. $\ln|3x-2| + 4\ln|x+1| + C$

   D. $\frac{5}{3}\ln|3x-2| - 4\ln|x+1| + C$

2. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{x+1}{(x^3+x^2-6x)}dx$

   A. $-\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$

   B. $-\frac{1}{6}\ln|x| - \ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$

   C. $-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| + \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$

   D. $-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{2}{15}\ln|x+3| + C$

   E. $-\frac{1}{6}\ln|x| + \frac{3}{10}\ln|x-2| - \frac{1}{15}\ln|x+3| + C$

3. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{(3x+5)dx}{x^3-x^2-x+1}dx$

   A. $\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{(x-2)} + C$

   B. $2\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{(x-2)} + C$

   C. $\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x-1| - \frac{4}{(x-2)} + C$

   D. $\ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{4}{(x-2)} + C$

   E. $\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + \frac{4}{(x-2)} + C$

4. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{2x^2+x-8}{x^3+4x}\ dx.$

A. -2 $\ln|x| + \frac{1}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln|x^2 + 4| + C$

B. -2 $\ln|x| - \frac{1}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln|x^2 + 4| + C$

C. $2\ln|x| + \frac{1}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\ln|x^2 + 4| + C$

D. -2 $\ln|x| - 2\ tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln|x^2 + 4| + C$

E. $2\ \ln|x| + \frac{1}{2}\ tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + 2\ln|x^2 + 4| + C$

5. Tentukan integral fungsi rasional trigonometri berikut $\int \frac{dx}{2-\cos x}$.

A. $-\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\tan\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c$

B. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\tan\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c$

C. $\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\tan\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c$

D. $\arctan\sqrt{3}\left(\tan\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c$

E. $\frac{2}{3}\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}\left(\tan\frac{x}{2}\right) + c$

6. Tentukan integral fungsi rasional trigonometri berikut $\int \frac{dx}{1+\sin x - \cos x}$

A. $2\ \ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$

B. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$

C. $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+c$

D. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+\tan\frac{x}{2}+c$

E. $\ln\left|\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right|+2\tan\frac{x}{2}+c$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

7. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{x^3-6x^2+11x-6}{4x^3-28x^2+56x-32}\,dx.$

8. Tentukan integral fungsi rasional berikut $\int \frac{x^6+4x^3+4}{x^3-4x^2}$ dx

9. Tentukan integral fungsi rasional trigonometri berikut $\int \frac{1}{3-2\sin x}$ dx

10. Tentukan integral fungsi rasional trigonometri berikut $\int \frac{1+2\sin+\cos x}{\sin x}$ dx

****ooo****

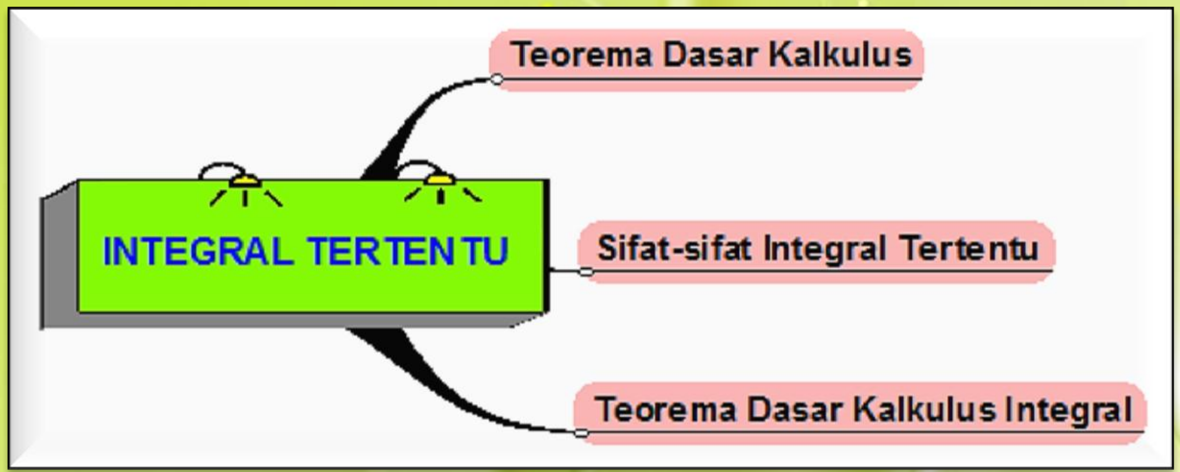
# BAB III
# INTEGRAL TERTENTU

***TUJUAN PEMBELAJARAN:***

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat membuktikan teorema dasar kalkulus.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menenetukan nilai integral tertentu sesuai dengan teorema dasar kalklus.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat membuktikan teorema dasar kalkulus integral.

***FOKUS BAB:***
***3.1 Teorema Dasar Kalkulus***
***3.2 Sifat-sifat Integral Tertentu***
***3.3 Teorema Dasar Kalkulus Integral***

## *PETA KONSEP*



## *PENGANTAR*

Pada dasarnya integral terbagi atas dua macam, yaitu integral tertentu dan integral tak tentu. Pada integral dapat dipandang sebagai antiturunan dan dapat dipandang sebagai jumlah Riemann. Integral tentu adalah suatu integral yang dibatasi oleh suatu nilai tertentu yang biasa disebut sebagai batas atas dan batas bawah. Integral ini biasanya digunakan untuk mencari luas suatu area. Bentuk umum dari integral tentu adalah sebagai berikut.

**DEFINISI INTEGRAL TERTENTU**

Misalkan f suatu fungsi yang kontinu pada selang [a,b]. Jika nilai $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ atau $\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ ada, dengan $\bar{x}_i$ sebagai titik tengah pada selang $[x_{i-1}, x_i]$, maka dapat dikatakan bahwa f dapat di integralkan (terintegralkan) pada selang [a,b]. Lebih lanjut $\int_a^b f(x)dx$ disebut integral tertentu (Integral Reimann). Integral Reimann f dari a ke b , yang didefinisikan dengan $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ .

## 3.1 TEOREMA DASAR KALKULUS

Teorema Dasar Kalkulus merupakan hubungan timbal balik antara turunan dan integral. Newton dan Leibniz yang menemukan hubungan ini dan digunakan untuk mengembangkan kalkulus menjadi metode matematis yang bersistem. Pada Teorema Dasar Kalkulus dapat digunakan untuk menghitung integral secara amat mudah tanpa harus menghitungnya sebagai limit jumlah Riemann.

**BAHAN DSKUSI SECARA KOLABORATIF-3**

### 3.1.1 Teorema Dasar Kalkulus

Jika $f$ kontinu pada selang $[a,b]$ dan F sebarang anti turunan dari $f$ maka:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Bukti:**

Bagilah selang $[a,b]$ menjadi n bagian yang sama panjang, andaikan P: a = $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots <$ $x_{n-1} < x_n = b$, b adalah partisi sebarang dari $[a,b]$.

Menurut ***Teorema Nilai Rata-Rata*** untuk turunan yang diterapkan pada $F$ untuk selang $[x_{i-1}, x_i]$ diperoleh $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\overline{x_i})\ (x_i - x_{i-1})$

$= f(\overline{x_i})\ \Delta x_i$, untuk suatu $\overline{x_i} \in (x_{i-1}, x_i)$

Sehingga

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_n)$$

$$= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots + F(x_1) - F(x_0)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]$$

***Berdasarkan Teorema Nilai Rata-Rata untuk turunan di atas, maka:***

$$= \sum_{i=1}^{n} \ \ldots \ \ \Delta x_i$$

Kemudian, karena fungsi $f$ kontinu pada $[a,b]$. Maka jumlah Riemann ini mempunyai limit untuk $\|p\| \to 0$ akibatnya dengan mengambil limitnya untuk $\|p\| \to 0$ diperoleh:

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} F(b) - F(a) = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \ \ldots \ \ \Delta x_i$$

***Berdasarkan limit jumlah Reimann, diperoleh:***

$$\lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \ \ldots \ \Delta x_i = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} [F(b) - F(a)]$$

$$\int_a^b f(x)dx \quad = F(b) - F(a)$$

**Cek Pemahaman**

1. Tunjukkan bahwa $\int_a^b k dx = k(b) - k(a)$ = k (b - a) dengan k konstanta.

   Penyelesaian:

   $$\int_a^b k\ dx = k[x]_a^b = \ \dots\ -\ \dots\ = k\ (\ \dots\ -\ \dots\ )$$

2. Hitunglah $\int_1^2 (4x^3 + 7)dx$

   Penyelesaian:

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

3. Hitunglah $\int_{-1}^2 (3x^2 - 2x + 3)dx$

   Penyelesaian:

   ........................................................................................................................

   ........................................................................................................................

### 3.1.2 Teorema Kelinearan Integral

Jika fungsi *f* dan *g* terintegral pada selang $[a,b]$ dan k konstanta, maka *kf* dan *f*+*g* adalah terintegral dan

a) $\int_a^b kf(x) = k\int_a^b f(x)dx$

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

c) $\int_a^b [f(x) - g(x)]x = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$

**Bukti:**

a) $\int_a^b kf(x)dx = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k\ f(\overline{x_i})\,\Delta x_i$

$$= k \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\,\Delta x_i$$

$$= k \int_a^b f(x)dx$$

b) $\int_a^b [f(x) + g(x)]x = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\overline{x_i}) + g(\overline{x_i})\right]\Delta x_i$

$$= \lim_{\|p\|\to 0} \left[ \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i})\Delta x_i \right]$$

$$= \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i + \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i$$

$$= \int_a^b \ \ldots. \quad dx + \int_a^b \quad \ldots \quad dx$$

c) $\int_a^b [f(x) - g(x)]x = \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left[f(\overline{x_i}) - g(\overline{x_i})\right]\Delta x_i$

$$= \lim_{\|p\|\to 0} \left[ \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \ \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i \right]$$

$$= \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \ \Delta x_i - \lim_{\|p\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \ \Delta x_i$$

$$= \int_a^b \quad \ldots \quad dx - \int_a^b \quad \ldots \quad dx$$

### 3.1.3 Teorena Substitusi dalam Integral Tertentu

Misalkan $g(x)$ suatu fungsi yang mempunyai turunan dan kontinu pada $[a\,,b]$ dan $f$ kontinu pada daerah hasil dari $g(x)$, maka $\int_a^b f(g(x)g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$, dengan $u = g(x)$

## Cek Pemahaman

4. Gunakan teorema kelinearan integral untuk menghitung integral berikut: $\int_{-1}^{2}(4x-6x^2)dx$

Penyelesaian:

$$\int_{-1}^{2}(4x-6x^2) = \int_{-1}^{2}4xdx - \int_{-1}^{2}6x^2dx$$

$$= 4\int_{-1}^{2}x\,dx - 6\int_{-1}^{2}x^2dx = 4[\ \ldots\ ]_{-1}^{2} - 6[\ \ldots\ ]_{-1}^{2} = (\ldots - \ldots) - (\ldots - \ldots) = \ldots$$

5. Gunakan teorema kelinearan integral untuk menghitung integral berikut: $\int_0^1\left[x^2+(x^2+1)x\right]dx$

Penyelesaian:

Agar dapat dengan mudah diintegralkan, sederhanakan terlebih dahulu integrannya (fungsi yang diientegralkan). Dengan cara dikalikan terlebih dahulu, baru diietegralkan.

.......................................................................................................................

.......................................................................................................................

6. Gunakan teorema substitusi dalam integral tertentu untuk menghitung integral berikut: $\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx$

Penyelesaian:

Misal: $u = x^3 + 3x$, maka $du = (3x^2 + 3)dx = 3(x^2 + 1)dx \rightarrow dx = \frac{du}{3(x^2+1)}$

Sedangkan untuk batas bawah dan batas atas unuk variabel x, diubah menjadi batas bawah dan batas atas untuk variabel u sebagai berikut: $x = 1 \rightarrow u = 1^3 + 3.1 = 4$

$x = 3 \rightarrow u = 3^3 + 3.3 = 18$

Sehingga soal menjadi

$$\int_1^3 \frac{x^2+1}{\sqrt{x^3+3x}}dx = \int_4^{18} \frac{x^2+1}{\sqrt{u}} \frac{du}{3(x^2+1)} = \int_4^{18} \frac{du}{3(\sqrt{u})} = \ldots$$

Silahkan carilah hasil akhirnya.

## 3.2 SIFAT-SIFAT INTEGRAL TERTENTU

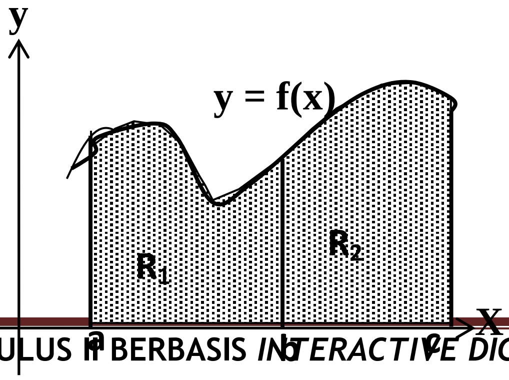
**Teorema-Teorema**

a) Sifat Penambahan Selang

Jika $f$ terintegralkan pada suatu selang yang memuat tiga titik $a$, $b$, dan $c$, maka $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$.

**Bukti:**

Untuk memahami teorema di atas, perhatikanlah kurva di bawah ini:



Pandang dua daerah $R_1$ dan $R_2$. Sehingga gabungan dua daerah

$R = R_1 \cup R_2$

$A(R) = A(R_1 \cup R_2) = A(R_1) + A(R_2)$, dimana $A(R)$, $A(R_1)$, dan $A(R_2)$ merupakan luas daerah masing-masing bidang tersebut. $A(R_2)$. Sehingga dapat dinyatakan sebagai berikut: $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$

b) Sifat Perbandingan

Jika $f$ dan $g$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan jika $f(x) < g(x)$ untuk semua $x \in [a,b]$, maka: $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

***Bukti***

Kita ambil sebarang partisi dari $[a,b]$, P: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ dan untuk tiap $i$ andaikan $\overline{xi}$ merupakan titik pada bagian ke-$i$ $[x_{i-1}, x]$, maka

$$f(\overline{x_i}) \leq g(\overline{x_i})$$

$$f(\overline{x_i})\Delta x_i \leq g(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} g(x_i)\Delta x_i$$

$$\lim_{|p|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i \leq \lim_{|p\to 0|} \sum_{i=1}^{n} g(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

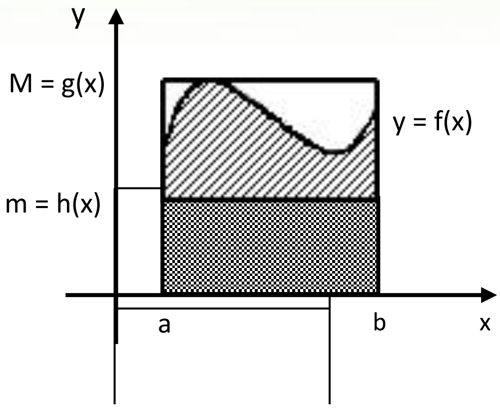
c) Sifat Keterbatasan

Jika $f$ terintegralkan pada $[a,b]$ dan jika $m \leq f(x) \leq M$ untuk semua $x$ dalam $[a,b]$,

maka: $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

***Bukti***

Kurva di bawah ini akan membantu dalam memahami teorema di atas




Pembuktian ruas kanan, yaitu $\int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$ .

Diketahui *M* = *g(x)* untuk semua *x* dalam $[a,b]$, maka menurut teorema sifat perbandingan:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx, \quad \text{sehingga}$$

$$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b Mdx = [\ \ \ldots\ \ ]_a^b = M(\ \ldots - \ldots\ ) \ \ .......................(1)$$

Pembuktian ruas kiri, yaitu $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx$ .

Diketahui m = *h(x)* untuk semua *x* dalam $[a,b]$, maka menuut teorema sifat perbandingan

$$\int_a^b h(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx, \text{ tetapi}$$

$$\int_a^b h(x)dx = \int_a^b \ldots dx = [\ \ \ldots\ \ ]_a^b = m(\ \ldots\ \ -\ \ \ldots\ ) \ \ .......................(2)$$

Dari pembuktian (1) dan (2) dapat disimpulkan bahwa teorema tersebut

$$m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

## Cek Pemahaman

1. Gunakan sifat penambahan selang untuk menghitung nilai integral tertentu berikut: $\int_{-1}^{2} |x|\, dx$

   **Penyelesaian:**

   **Ingat:** definisi nilai mutlak $|x| = \begin{cases} x\,, x \geq 0 \\ -x\,, x < 0 \end{cases}$, sehingga batas integral dipecah sesuai definisi, dengan menggunakan sifat menambahan selang integral menjadi: $\int_{-1}^{2} |x|\, dx = \int_{-1}^{0} -x\, dx \; + \int_{0}^{2} x\, dx$

   **Silahkan dilanjutkan untuk menentukan nilai integral tersebut.**

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

2. Gunakan sifat penambahan selang untuk menghitung nilai integral tertentu berikut: $\int_{-2}^{3} (x + |x| - 4)\, dx$

   **Penyelesaian:**

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

   ......................................................................................................................

3. Gunakan sifat penambahan selang untuk menghitung nilai integral tertentu berikut: $\int_{-2}^{3} (x - [\![x]\!])\, dx$

   **Penyelesaian:**

   **Ingat**: definisi bilangan bulat terbesar $[\![x]\!] = \begin{cases} 3\,, & 3 \leq x < 4 \\ 2\,, & 2 \leq x < 3 \\ 1\,, & 1 \leq x < 2 \end{cases} \quad dst$

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

.............................................................................................................................

## LEMBAR KERJA-3

Gunakan Teorema Dasar Kalkulus untuk menghitung setiap integral tertentu berikut ini!

1. $\int_{1}^{8} \sqrt[3]{x}\, dx$
2. $\int_{1}^{4} \frac{x^4-8}{x^2}\, dx$
3. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$
4. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x\ \, dx$
5. $\int_{1}^{3} (2x^4 - 3x^2 + 5)\, dx$

Gunakan Teorema substitusi integral tertentu untuk menghitung setiap integral berikut!

6. $\int_{0}^{1} \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^2} dx$
7. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} sin^3 x \cos x\ \, dx$
8. $\int_{0}^{1} x \sin(\pi x^2)\ \, dx$
9. $\int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^3}\, dx$

Gunakan sifat penambahan selang untuk menghitung setiap integral berikut ini!

10. $\int_{-3}^{4} |2x-1|\ \, dx$
11. $\int_{-\pi}^{\pi} |\cos x|\ \, dx$
12. $\int_{-2}^{2} [\![x-3]\!]\ \, dx$

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-3

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-3}^{3} 8x\sqrt{7+2x^2}\ dx$

   A. 1     C. 5     E. 4

   B. 0     D. -3

2. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{0}^{4}(\sqrt{x}\ + \sqrt{2x+1}\,)\ dx$

   A. 15     C. 12     E. 14

   B. -14     D. -9

3. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ sin^2x\ \cos x\ dx$

   A. $\frac{1}{24}$     C. $\frac{24}{7}$     E. $\frac{1}{3}$

   B. $\frac{7}{24}$     D. $\frac{7}{14}$

4. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-2}^{2}\ \frac{dx}{x^2+4}$

   A. $\frac{1}{2}\ \pi$     C. $\frac{1}{5}\ \pi$     E. $\frac{1}{4}\ \pi$

   B. $\frac{2}{3}\ \pi$     D. $\frac{1}{3}\ \pi$

5. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{0}^{1} \ln x\ dx$

   A. $-1$     C. 3     E. 5

   B. 2     D. 1

6. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{4}^{8} \frac{x\ dx}{\sqrt{x^2-15}}$

   A. 6     C. 5     E. -5

   B. $-6$     D. $-7$

7. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{0}^{1} \frac{x+2}{(x^2+4x+1)^2}\ dx$

   A. $\frac{6}{13}$     C. $\frac{5}{12}$     E. $\frac{1}{5}$

   B. $\frac{5}{13}$     D. $-\frac{6}{13}5$

8. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2x + \sin 2x)\ dx$

A. $-2$ C. $-1$ E. -3

B. $\frac{1}{2}$ D. 1

9. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-1}^{1} (|x^3| + x^3)dx$

A. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ E, -1

B. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{3}$

10. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-\pi}^{\pi} (|\sin x| + x^5)dx$

A. $-3$ C. $-4$ E. 4

B. 5 D. $-6$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

11. Hitunglah $\int_0^5 f(x)\ dx$ , dari fungsi $f(x) = \begin{cases} x + 2\ , jika\ 0 \leq x < 2 \\ 6 - x\ , jika\ 2 \leq x < 5 \end{cases}$

12. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-2}^{-1} \frac{dt}{\sqrt{t^2+2t+2}}$

13. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2(sin^2(x^3)\cos(x^3)\ dx$

14. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_1^4 \frac{dt}{\sqrt{t}\ (\sqrt{t}+1)^3}$

15. Hitunglah integral tertentu berikut $\int_{-\pi}^{\pi} |sin^5\theta| \cos\theta\ d\theta$

****ooo****

# BAB IV
# APLIKASI INTEGRAL TERTENTU
# LUAS BIDANG DATAR

***TUJUAN PEMBELAJARAN:***

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung luas bidang datar.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode cakram.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode cincin.
4. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode kulit silinder.
5. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda padat.
6. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung panjang kurva..
7. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung luas permukaan benda putar.
8. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung usaha dengan integral.
9. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung tekanan zat cair dengan integral.

***FOKUS BAB:***

*4.1 Luas Bidang Datar*
*4.2 Volume Benda Putar:*
  *a. Metode Cakram*
  *b. Metode Cincin*
  *c. Metode Kulit Silinder*
*4.3 Volume Benda: Metode Irisan Benda Padat*
*4.4 Panjang Kurva*
*4.5 Luas Permukaan benda putar*
*4.6 Massa dan Pusat Massa*
*4.7 Fisika:*
  *a. Usaha*
  *b. Tekanan Zat Cair*

## PETA KONSEP


## PENGANTAR

Penerapan integral dalam kehidupan sehari-hari sangat luas. Dari yang sederhana, hingga aplikasi perhitungan yang sangat kompleks. Aplikasi integral banyak digunakan di berbagai disiplin ilmu. Beberapa contoh penggunaan integral dalam disiplin ilmu alam adalah digunakan dalam bidang biologi untuk menghitung laju pertumbuhan organisme, dalam bidang fisika untuk menghitung massa, pusat massa, usaha dan tekanan zat cair. Sedangkan aplikasi integral untuk hal-hal yang lain, misalnya digunakan untuk mencari luas suatu area, menghitung volume benda dan lain sebagainya. Berikut merupakan aplikasi-aplikasi integral yang telah dikelompokkan dalam beberapa kelompok perhitungan. Penjelasan lebih lanjut dapat dilihat pada keterangan yang diberikan.

Sebagai ilustrasi dengan runtuhnya Jembatan Tacoma, Washington yang panjangnya 1,8 km di buka pada 1 Juli 1940. Empat bulan kemudian jembatan tersebut runtuh karena badai yang berkekuatan 68 km/jam.

Sedangkan di Indonesia runtuhnya jembatan Kutai Kartanegara pada 26 Nopember 2011, yang disebabkan kesalahan konstruksi dasar.

# 4.1 LUAS BIDANG DATAR

## 4.1.1 LUAS BIDANG DATAR DIBATASI SATU KURVA

Pilar-pilar jembatan pada gambar di bawah membentuk partisi-partisi yang akan ditemukan dalam pokok bahasan menghitung luas daerah dengan menggunakan integral.

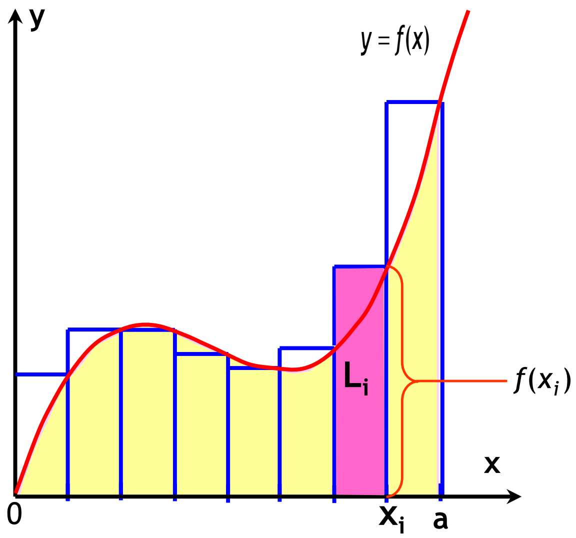

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORASI-4.1**

### A. LUAS DAERAH DENGAN KONSEP LIMIT JUMLAH RIEMANN

Menentukan luas daerah dengan ***konsep limit jumlah Riemann*** dapat diilustrasikan oleh Gambar 4.1 di bawah. Langkah pertama yang dilakukan adalah *membuat partisi*, *mengaproksimasi*, *menjumlahkan*, *dan menghitung limitnya*.

Misalkan daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$ yang kontinu pada $[0, a]$, dan sumbu x, seperti Gambar 4.1. Berikut ini akan dijelaskan langkah-langkah menentukan luas bidang dengan *konsep limit jumlah Riemann:*

1. Gambarlah daerahnya.




Gambar: 4.1

2. Bagilah interval menjadi selang yang sama panjang.
3. Partisilah daerah tersebut menjadi, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = a$
4. Masing-masing partisi buatlah persegi panjang. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[x_{i-1}, x_i]$, dengan mengambil titik sampel pada ujung selang $x_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
5. Aproksimasi luasnya, yaitu tentukan luas persegi panjang ke-i: $\boldsymbol{L_i = f(x_i)\Delta x_i}$ (dengan panjang $= f(x_i)$).
6. Jumlahkah luas semua persegi panjang: $\boldsymbol{L_i \approx \sum f(x_i)\Delta x_i}$
7. Hitung nilai limit jumlahnya. Jika partisi diambil sebanyak n → ∞, maka luas bidang datar sebagai berikut.

$$\textbf{\textit{Luas bidang datar}} \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

**INGAT!**
**NOTASI SIGMA (∑)**

Sering kali dilakukan operasi penjumlahan dari sejumlah berhingga bilangan real, misalkan $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$, operasi ini dapat disingkat dengan menggunakan lambang penjumlahan ∑ (Notasi Sigma) yang didefinisikan sebagai berikut.

**Definisi, Notasi Sigma (∑)**

Misalkan$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ € R. Jumlah dari $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ dapat disingkat dengan lambang $\sum n$ yang didefinisikan sebagai $\sum_{i=1}^{n} a_1 = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$

**Definisi**

Misalkan c € R maka $\sum_{i=1}^{n} c = c + c + c + \cdots + c = nc$

## TEOREMA JUMLAH KHUSUS

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = [\frac{n(n+1)}{2}]^2$

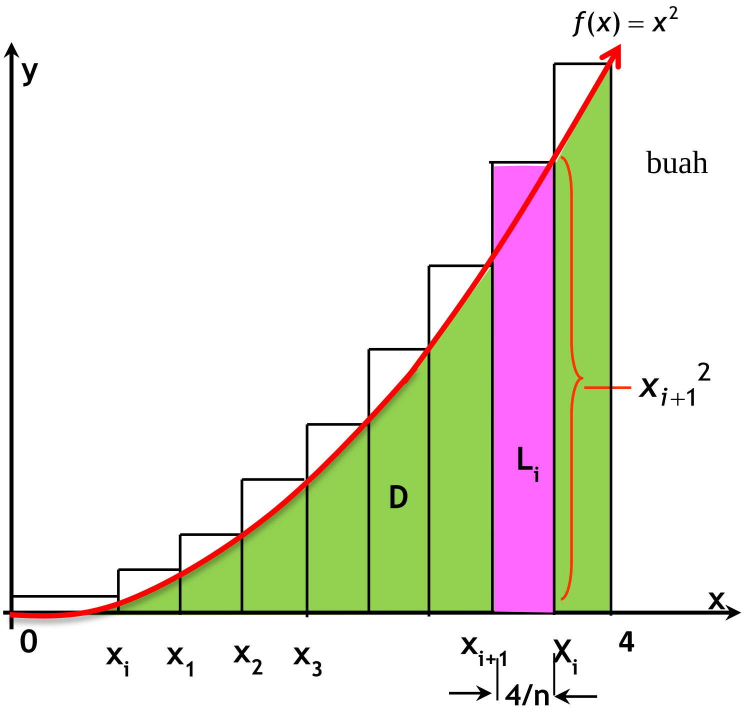
**Silahkan buktikan dengan Induksi Matematika!**

## Cek Pemahaman

1. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2$ yang kontinu pada [0,4], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan cara limit jumlah.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.




a. Gambarlah daerah D.

b. Bagilah interval [0, 4] menjadi n selang yang sama panjang; dengan panjang setiap partisi $\frac{4}{n}$.

c. Partisi daerah tersebut menurut persegi panjang luar.

d. Tentukan ukuran persegi panjang pada interval [$x_i$ , $x_{i+1}$], $\Delta x_i = \frac{4}{n}$ hitunglah luasnya.

$x_0 = 0$

$x_1 = \frac{4}{n}$

$x_2 = 2.\frac{4}{n}$

$x_3 = 3.\frac{4}{n}$

.

.

.

$x_i = i.\frac{4}{n}$, maka $f(x) = f(x_i) = (x_i)^2 = (i.\frac{4}{n})^2 = i^2\frac{16}{n^2}$

Jadi luas daerah ke-i adalah:

$L_i = f(x_i)\ \Delta x_i$

$L_i = i^2\frac{16}{n^2}\ .\frac{4}{n}$

e. Jumlahkan luas semua partisi adalah:

$$Luas\ daerah\ D \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x_i$$

f. Ambil limitnya untuk $n \to \infty$

$$Luas\ daerah\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} i^2 \frac{16}{n^2} \cdot \frac{4}{n}$$

**Ingat!** $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{64}{n^3} \left[\frac{\dots + \dots + \dots}{6}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{\dots}{3} + \frac{\dots}{n} + \frac{\dots}{n^2}\right]$$

$$= \frac{\dots}{3} + 0 + 0$$

$$= \frac{\dots}{3}\ satuan\ luas$$

2. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2 + 2$ yang kontinu pada [-1,2], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan cara limit jumlah.
3. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^3$ yang kontinu pada [-1,3], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan cara limit jumlah.

## B. LUAS DAERAH DENGAN KONSEP INTEGRAL RIEMANN

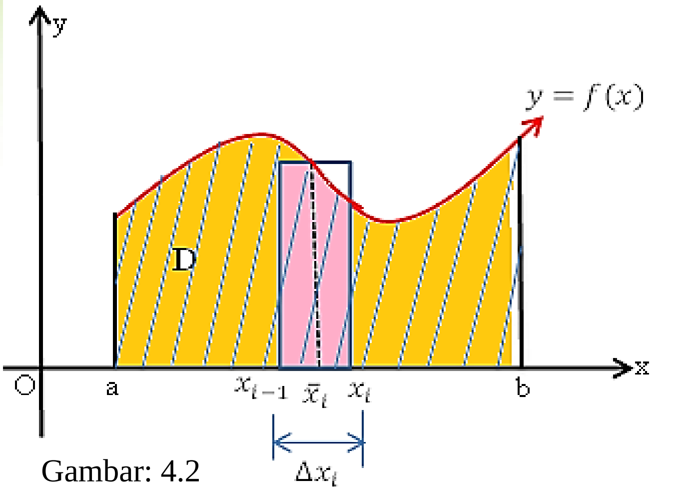
### B.1 TEOREMA 1: Luas Daerah di batasi Satu Kurva di Atas Sumbu X

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f$ yang kontinu $[a, b]$, $f(x) \geq 0$ pada $[a, b]$ garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu $x$. maka :

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

**Bukti:**

a. Gambar daerah D, dengan mmembagi selang $[a, b]$ dibagi menjadi $n$ bagian dengan lebar selang ke-$i$ adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Seperti pada Gambar 4.2 di bawah ini.




Gambar: 4.2

b. Ambil titik sampel $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kemudian tentukan luas daerah satu bagian ke-i dengan panjang= … (***Ingat: panjang berada di atas sumbu x*** ), dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ adalah: $L_i = panjang.lebar =$ ... $\Delta x_i$

c. Menghitung luas daerah D seluruhnya yang merupakan jumlah Riemann, yaitu:
$Luas\ D = \sum_{i=1}^{n}$ ... $\Delta x_i$.

d. Dengan mengambil $n \to \infty$ atau $\Delta x_i \to 0$, smaka luas daerah D adalah:

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ \ldots\ \Delta x_i$$

e. Limit sigma ini oleh Riemann dinotasikan dengan integral tertentu sebagai berikut:
$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$ ... $\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$.

Pembuktian tersebut menunjukkan bahwa secara geometri integral Riemann dapat diartikan sebagai luas daerah yang dibatasi kurva $y = f(x)$ pada interval $[a, b]$, yaitu $Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$ ... $\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$ (***Integral Riemann/Integral Tertentu***).

Berdasarkan Teorema Dasar Kalkulus, telah terbukti bahwa integral Riemann yang berbunyi misalkan $f$ fungsi yang kontinu pada selang $[a, b]$, dan F adalah anti turunan dari $f$ pada selang tersebut, maka berlaku $\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Jadi luas daerah $Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$, dapat dihitung dengan menggunakan Teorema Dasar Kalkulus tersebut.

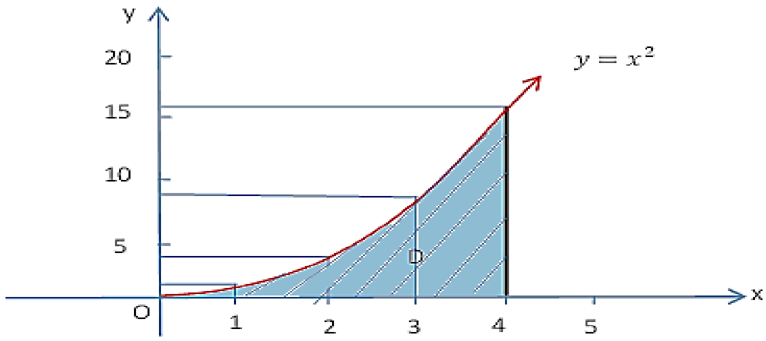
## Cek Pemahaman

4. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2$ yang kontinu pada [0,4], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

a. Gambar daerah D




b. Menentukan batas integral, yaitu pada interval $[0,4]$

c. Menghitung luas daerah D yang dibatasi fungsi $y = x^2$ pada interval $[0,4]$, $dan\ f(x) \geq 0$, dengan integral, sebagai berikut:

$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i = \int_0^4 x^2\, dx =$ ... satuan luas

5. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2 + 2$ yang kontinu pada [-1,2], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x, yaitu pada interval $[-1,2]$.

c. Menghitung luas daerah D dengan integral Riemann (integral tertentu).

6. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^3$ yang kontinu pada [-1,3], dan sumbu X. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x, yaitu pada interval $[-1,3]$.

c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

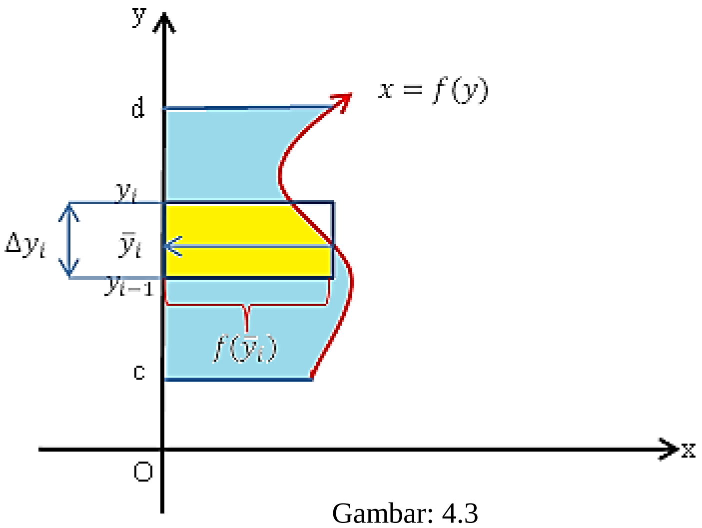
## B.2 TEOREMA 2: Luas Daerah di Batasi Satu Kurva di Atas Sumbu Y

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $x = f(y)$ yang kontinu $[c,d]$, *f(y) ≥ 0* pada $[c,d]$ garis *y = c*, garis *y = d* dan sumbu y. maka :

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{y}_i)\ \Delta y_i = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{y}_i)\ \Delta y_i = \int_c^d f(y)\ dy$$

**Bukti:**

a. Gambar daerah D, dengan mmembagi selang $[c,d]$ dibagi menjadi *n* bagian dengan lebar selang ke-*i* adalah $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ . Seperti pada Gambar 4.3 di bawah ini.




Gambar: 4.3

b. Ambil titik sampel $\bar{y}_i \in [y_{i-1}, y_i]$, kemudian tentukan luas daerah satu bagian ke-i dengan panjang= $\ldots$ (***Ingat: panjang berada di atas sumbu y***), dan lebar $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ adalah: $L_i = panjang.lebar = \ \ldots\ \Delta y_i$

c. Menghitung luas daerah D seluruhnya yang merupakan jumlah Riemann, yaitu: $Luas\ D = \sum_{i=1}^{n}\ \ldots\ \Delta y_i$.

d. Dengan mengambil $n \to \infty$ atau $\Delta y x_i \to 0$, smaka luas daerah D adalah:

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ \ldots\ \ \Delta y_i$$

e. Limit sigma ini oleh Riemann dinotasikan dengan integral tertentu sebagai berikut:

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ \ldots\ \ \Delta y_i = \int_c^d \ \ldots\ \ dy.$$

## Cek Pemahaman

7. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $= y^2$ , sumbu y dan garis $y = 3$. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu y.

c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

8. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $= 2\sqrt{y}$ , sumbu y dan garis $y = 4$. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu y.

c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

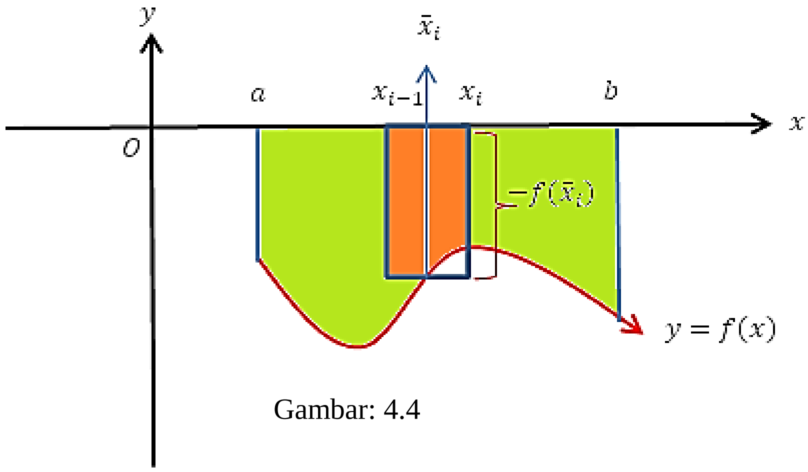
### B.3 <u>TEOREMA 3: Luas Daerah di Batasi Satu Kurva di Bawah Sumbu X</u>

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $f$ yang kontinu $[a, b]$, $f(x) \leq 0$ pada $[a, b]$ garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu $x$. maka :

$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} -f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{i=1}^{n} -f(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_a^b -f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

**Bukti:**

a. Gambar daerah D, dengan mmembagi selang $[a, b]$ dibagi menjadi $n$ bagian (lebar tidak harus sama) dengan lebar selang ke-$i$ adalah $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Seperti pada Gambar 4.4 di bawah ini.




Gambar: 4.4

b. Ambil titik sampel $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kemudian menentukan luas daerah satu bagian ke-i dengan panjang= … (***Ingat: panjang berada di bawah sumbu x***), dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ adalah: $L_i = panjang.lebar =$ … $\Delta x_i$ .

c. Menghitung luas daerah D seluruhnya yang merupakan jumlah Riemann dituliskan sebagai : $Luas\ D = \sum_{i=1}^{n}$ … $\Delta x_i$.

d. Bagilah selang $[a, b]$ menjadi n bagian, dengan ambil $n \to \infty$ atau $\Delta x_i \to 0$, sehingga Luas daerah D adalah: $Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$ … $\Delta x_i$

e. Limit sigma ini oleh Riemann dinotasikan dengan integral tertentu sebagai berikut:

$Luas\ D = \lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}$ … $\Delta x_i = -\int_a^b f(x)\, dx.$

**Cek Pemahaman**

9. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $= \frac{1}{4}x - 2$ , sumbu x, garis $x = 4$. Dan sumbu y. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah menentukan luas daerah D, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x.

c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

10. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh parabola $y = x^2 - 6x$ dan sumbu X.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah menentukan luas daerah D, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x.

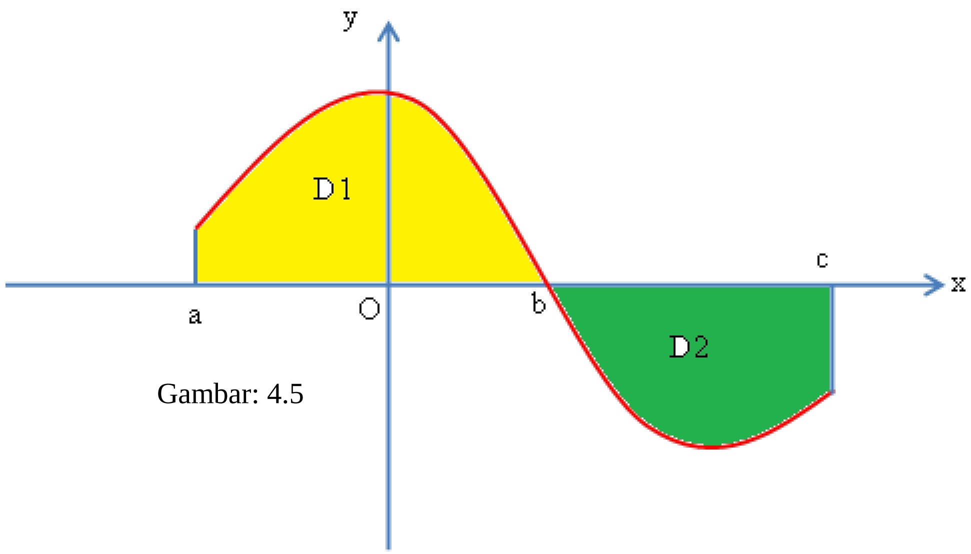
c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

### B.4 TEOREMA 4: Luas Daerah di Batasi kurva $y = f(x)$ dan Sumbu X

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = f(x)$, sumbu x, garis $x = a$ dan garis $x = c$, dengan $f(x) \geq 0$ pada interval $[a, b]$, dan $f(x) \leq 0$ pada interval $[b, c]$, maka luas daerah D adalah $Luas\ D = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$

**Bukti:**

a. Gambar daerah D, seperti pada Gambar 4.5 di bawah ini.




Gambar: 4.5

b. Pada Gambar 4.5, daerah D terbagi menjadi 2 daerah, yaitu daerah D1 yang dibatasi $y = f(x)$, dengan $f(x) \geq 0$ pada interval $[a, b]$ dan daerah D2 yang dibatasi $y = f(x)$, dengan $f(x) \leq 0$ pada interval $[b, c]$

c. Menghitung luas daerah D seluruhnya sesuai dengan batas-batasnya, yaitu:

$Luas\ D = \int_a^b \ \ldots \ \ dx \ + \ [\int_b^c \ \ldots \ \ dx]$.

**Cek Pemahaman**

11. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = \sin x$, sumbu x pada interval $[0,2\pi]$. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah menentukan luas daerah D, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x.

c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

### 4.1.2 LUAS DAERAH ANTARA DUA KURVA DENGAN INTEGRAL RIEMANN

**<u>TEOREMA 5: Luas Daerah Antara Dua Kurva</u>**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi dua kurva fungsi $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) > g(x)$, pada interval $[a, b]$, maka luas daerah D adalah:

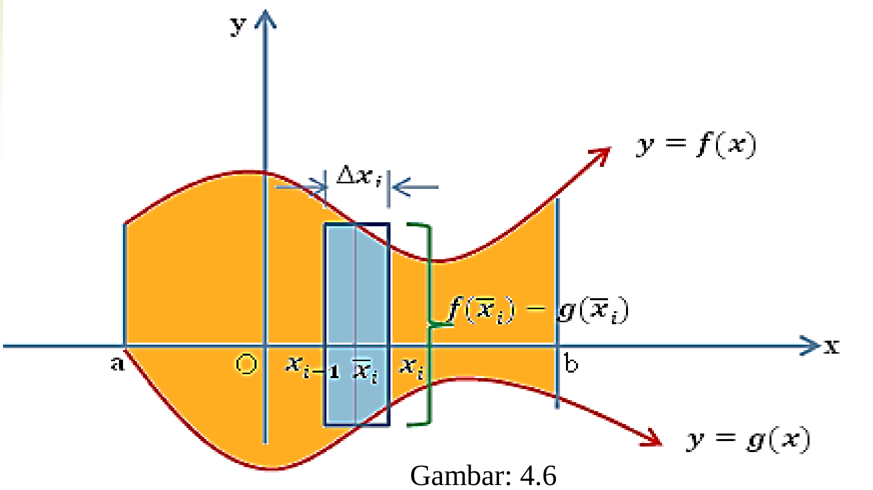
$$Luas\ D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)]\Delta x_i = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx$$

**Bukti:**

Dengan menggunakan cara : *partisi, aproksimasi, jumlahkan, ambil limitnya, integralkan*, maka dapat ditentukan luas daerah antara dua kurva tersebut.

Langkah-langkah pembuktian, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D yang dibatasi dua kurva, seperti Gambar 4.6 di bawah ini.



Gambar: 4.6

b. Buat partisi pada daerah D.

c. Ambil titik sampel $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$, kemudian menentukan luas daerah satu bagian ke-i dengan panjang= ( ... − ... ), dan lebar $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ adalah:

$L_i = panjang.lebar = \;\; ( \; ... - ... \; ) \, \Delta x_i$ .

d. Jumlahkah luas semua persegi panjang: $L_i \approx \sum_{i=1}^{n} [ \; ... - ... \; ] \Delta x_i$

e. Jika partisi diambil sebanyak n → ∞, maka luas daerah D adalah:

$$\textit{Luas D} \approx \sum_{i=1}^{n} [ \; ... - ... \; ] \Delta x_i = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} [ \; ... - ... \; ] \Delta x_i = \int_a^b [ \; ... - ... \; ] \, dx$$

## Cek Pemahaman

12. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2 + 2$ dan $y = -x$, pada interval $[-2, 2]$. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah menentukan luas daerah D, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.

b. Menentukan batas integral pada sumbu x.

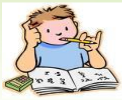
c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).

13. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^2$ dan $y = -x + 2$. Tentukan luas daerah D tersebut dengan menggunakan integral Riemann.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkah menentukan luas daerah D, sebagai berikut:

a. Gambar daerah D.
b. Menentukan batas integral pada sumbu x, dengan cara mencari titik potong kedua fungsi tersebut.
c. Menghitung luas daerah D dengan dengan integral Riemann (integral tertentu).



# LEMBAR KERJA-4.1

1. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = x^2 + 1$, sumbu x pada interval $[-1\,, 2]$.

   Ditanyakan:

   a. Gambar daerah D tersebut.

   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan limit jumlah Riemann.

2. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = x^2 + 2x - 3$, dan sumbu x.

   Ditanyakan:

   a. Gambar daerah D tersebut.

   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan integral Riemann.

3. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $x = 8y - y^2$, dan sumbu y.

   Ditanyakan:

   a. Gambar daerah D tersebut.

   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan integral Riemann.

4. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = x^2 - 2x$ dan$y = -x^2$.

   Ditanyakan:

   a. Gambar daerah D tersebut.

   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan integral Riemann.

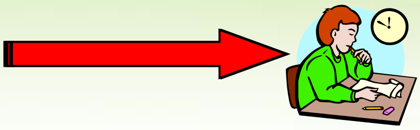
5. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $x = y^2 - 2y$ dan $x - y - 4 = 0$.

   Ditanyakan:

   a. Gambar daerah D tersebut.

   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan integral Riemann.

****OOO****



## UJI KOMPETENSI-4.1

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x + 3$, sumbu $x$, garis $x = -2$ dan garis $x = 3$, adalah:

   A. $17\frac{1}{2}$ *satuan luas* c. $17$ *satuan luas* E. $17$ *satuan luas*

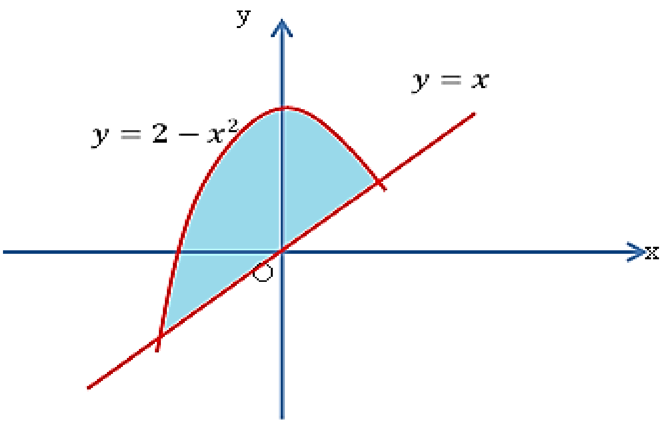
   B. $15\frac{1}{2}$ *satuan luas* d. $16\frac{1}{2}$ *satuan luas*

2. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x^3$, sumbu $x$, garis $x = -2$ dan garis $x = 2$, adalah:

   A. $10$ *satuan luas* C. $7\frac{1}{2}$ *satuan luas* E. $8$ *satuan luas*

   B. $7$ *satuan luas* D. $6\frac{1}{2}$ *satuan luas*

3. Diketahui daerah D seperti pada Gambar di bawah, luas daerah D tersebut adalah:




   A. $\frac{7}{2}$ *satuan luas* C. $7$ *satuan luas* E. $7\frac{1}{2}$ *satuan luas*

   B. $3$ *satuan luas* D. $\frac{9}{2}$ *satuan luas*

4. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $4y^2 - 2x = 0$ dan $4y^2 + 4x - 12 = 0$ adalah:

   A. $3$ *satuan luas* C. $4$ *satuan luas* E. $7$ *satuan luas*

   $5$ *satuan luas* D. $6$ *satuan luas*

5. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y = x - 1$ dan $x = 3 - y^2$ adalah:

A. $\frac{3}{2}$ $satuan\ luas$ C. $\frac{5}{2}$ $satuan\ luas$ E. $\frac{9}{2}$ $satuan\ luas$

B. $\frac{5}{3}$ $satuan\ luas$ D. $\frac{7}{2}$ $satuan\ luas$

6. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $x = -6y^2 + 4y$ dan $x + 3y - 2 = 0$ adalah:

A. $\frac{3}{213}$ $satuan\ luas$ C. $\frac{5}{216}$ $satuan\ luas$ E. $\frac{9}{213}$ $satuan\ luas$

B. $\frac{1}{216}$ $satuan\ luas$ D. $\frac{7}{213}$ $satuan\ luas$

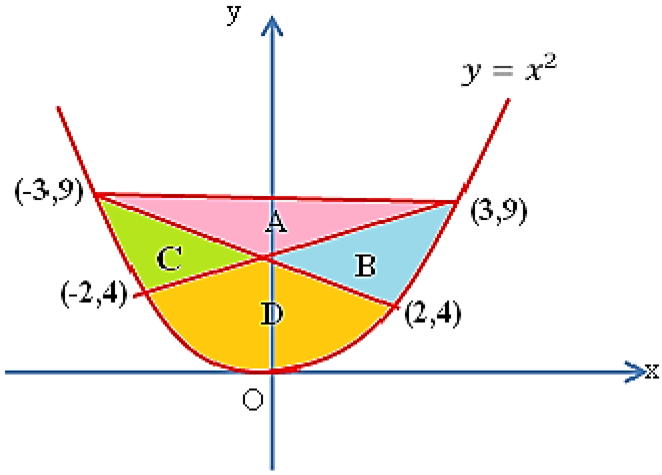
7. Luas daerah D yang dibatasi oleh grafik fungsi $y^2 = 4x$ dan $4x - 3y = 4$ adalah:

A. $\frac{125}{24}$ $satuan\ luas$ C. $\frac{125}{27}$ $satuan\ luas$ E. $\frac{125}{27}$ $satuan\ luas$

B. $\frac{225}{24}$ $satuan\ luas$ D. $\frac{225}{27}$ $satuan\ luas$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

8. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = x + 6$, $y = x^3$, dan $2y + x = 0$.
   Ditanyakan:
   a. Gambar daerah D tersebut.
   b. Tentukan luas daerah D dengan menggunakan integral Riemann.
9. Diketahui segitiga yang titik-titik sudutnya adalah $(-1,4)$ , $(2,-2)$ , $dan$ $(5,1)$ .
   Ditanyakan:
   a. Gambar segitiga tersebut.
   b. Tentukan luas segitiga dengan menggunakan integral Riemann.
10. Hitunglah jumlah luas A, B, C, dan D dalam Gambar di bawah ini.




****OOO****

# BAB IV-2
# APLIKASI INTEGRAL TERTENTU
# VOLUME BENDA PUTAR
# METODE CAKRAM, CINCIN, DAN KULIT SILINDER

***TUJUAN PEMBELAJARAN:***

**FOKUS BAB:**

**4.2 Volume Benda Putar:**

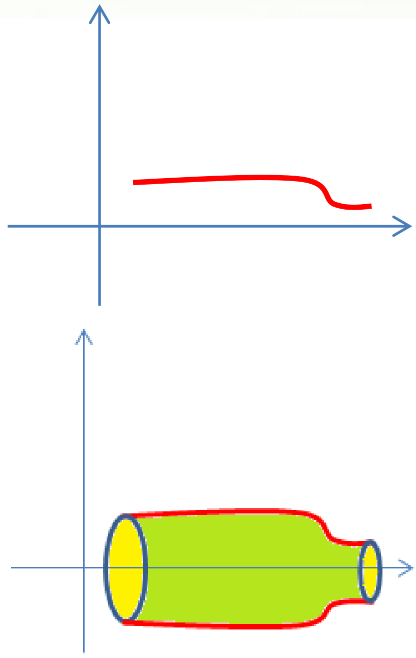
1. **Metode Cakram**
2. **Metode Cincin**
3. **Kulit Silinder**

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode cakram.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode cincin.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda putar dengan metode kulit silinder.

***PETA KONSEP***

## PENGANTAR

Penerapan integral dalam kehidupan sehari-hari sangat luas. Salah satunya digunakan untuk menghitung volume benda putar. Volume benda putar adalah volume benda ruang yang terbentuk dari hasil pemutaran suatu daerah di bidang datar terhadap garis tertentu (sumbu rotasi).



Sebagai ilustrasi, botol di samping dapat dipandang sebagai benda putar jika kurva di atasnya diputar menurut garis horisontal. Sehingga volume botol dapat ditentukan dengan menggunakan aplikasi integral.

Pada pokok bahasan ini akan dipelajari penggunaan integral untuk menghitung volume benda putar dengan metode cakaran dan metode cincin. Penjelasan lebih lanjut dapat dilihat pada penjelsan berikut..

## 4.2.1 VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE CAKRAM

### 4.2.1.a METODE CAKRAM DENGAN SUMBU PUTAR SUMBU X

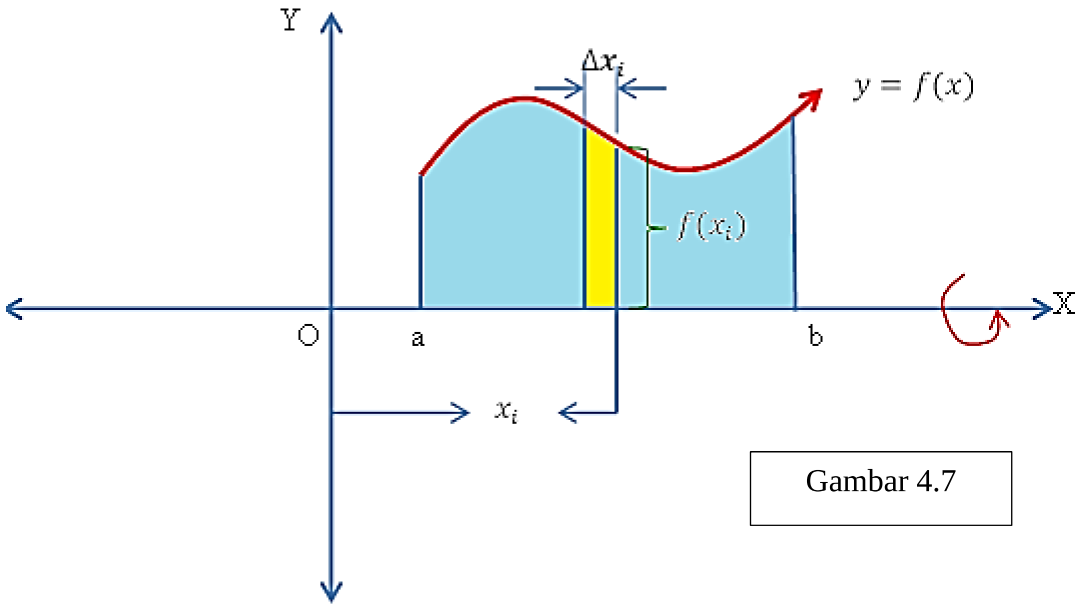
Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis: V = luas alas . Tinggi = a.t.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2-1**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $y = f(x)$ dengan $f(x) \geq 0$ pada interval $[a, b]$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu $x$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

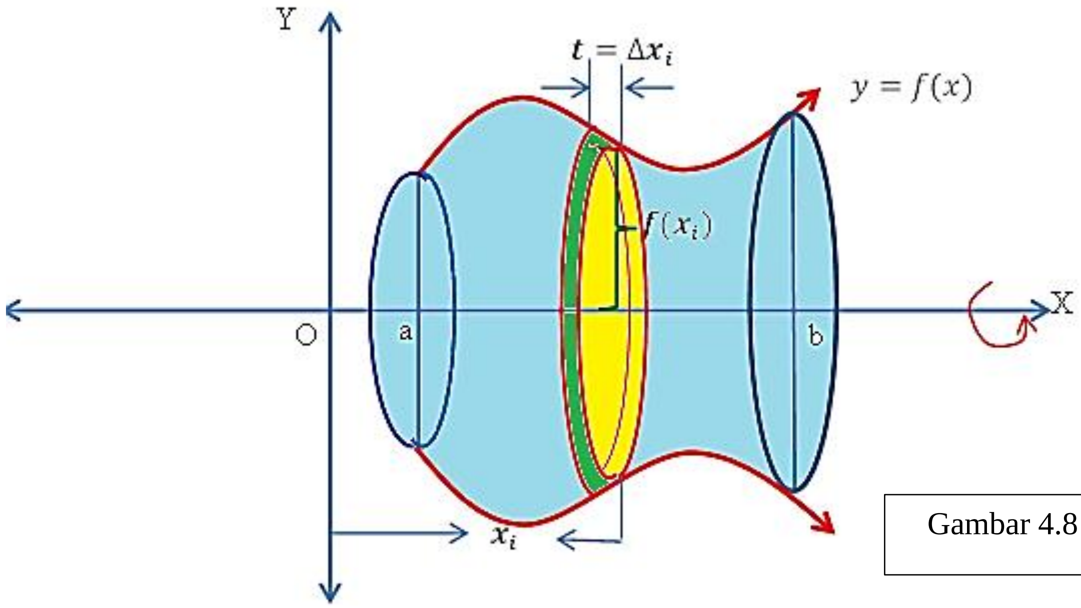
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Cakram**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[a\ ,b]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, seperti terlihat pada Gambar 4.7 di bawah ini.



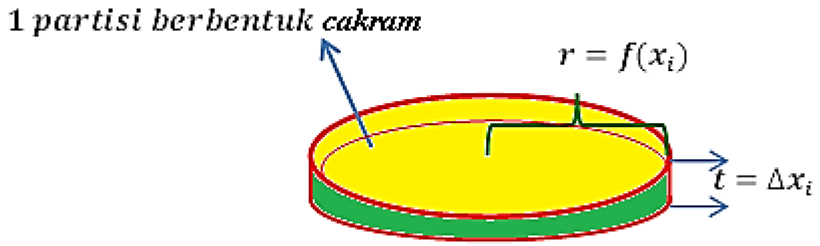

Gambar 4.7

2. Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $x$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.8 berikut. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[x_{i-1}\ , x_i]$.




Gambar 4.8

3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk cakram lingkaran, seperti terlihat pada Gambar 4.9 di bawah ini. Bentuk cakram lingkaran tersebut mempunyai jari-jari $f(x_i)$ dan tebalnya ( tinggi) $\Delta x_i$.




Gambar 4.9

Sehingga volume cakram lingkaran tersebut adalah luas alas . tinggi atau $V_i = a\,.\,t$

$V_i = luas\ lingkaran\,.\,tinggi$

$V_i = \pi r^2\,.\,t = \pi\ (\ \ldots\ )^2(\ \ldots\ )$

4. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\ \ldots\ )^2(\ \ldots\ )$, bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah

$V_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\ \ldots\ )^2(\ \ldots\ )$, Ingat limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_a^b \pi\ (\ \ldots\ )^2\ \ \ldots$$

5. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$V_D = \int_a^b \pi\ (\ \ldots\ )^2\ \ \ldots$$

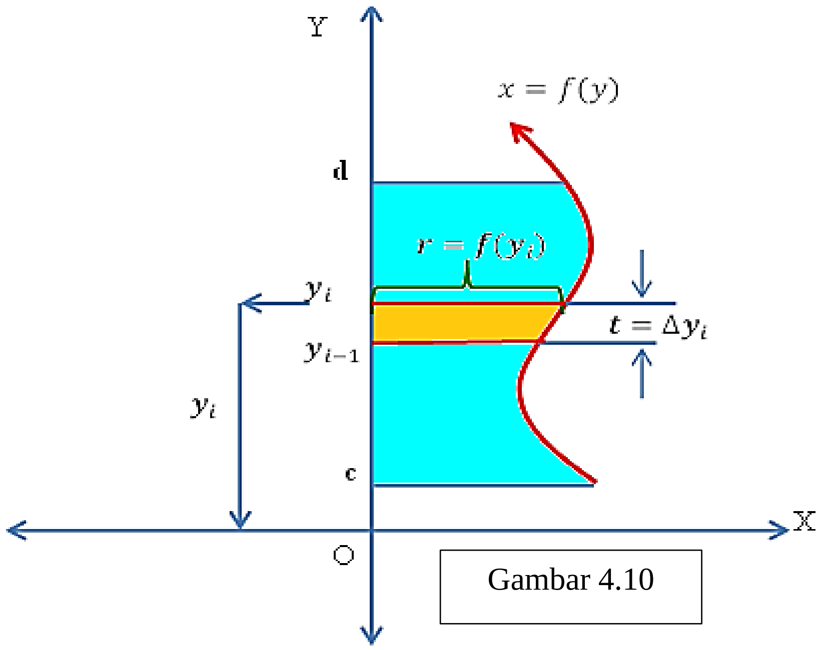
## 4.2.1.b METODE CAKRAM DENGAN SUMBU PUTAR SUMBU Y

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2-2**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $x = f(y)$ dengan $f(y) \geq 0$ pada interval $[c\,, d]$, garis $y = c$, garis $y = d$ dan sumbu $y$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

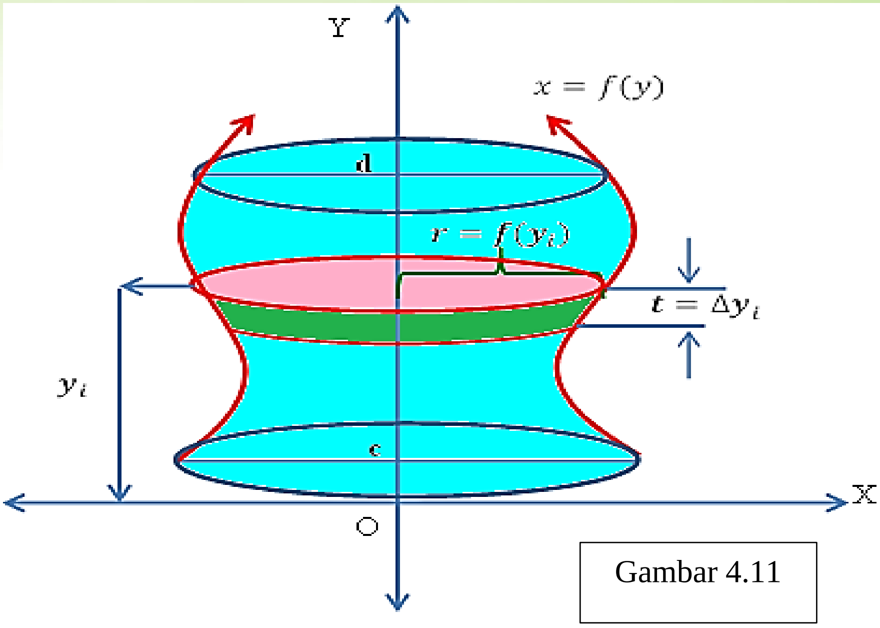
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Cakram**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[c\,, d]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_n = d$, seperti terlihat pada Gambar 4.10 di bawah ini.



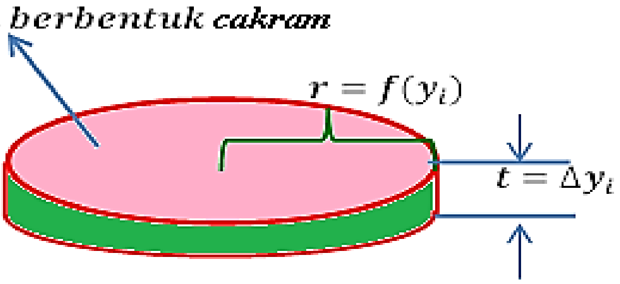

Gambar 4.10

2. Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.11 berikut. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[y_{i-1}\,, y_i]$.




Gambar 4.11

3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk cakram lingkaran, seperti terlihat pada Gambar 4.12 di bawah ini. Bentuk cakram lingkaran tersebut mempunyai jari-jari $f(y_i)$ dan tebalnya ( tinggi) $\Delta y_i$.




Gambar 4.12

Sehingga volume cakram lingkaran tersebut adalah luas alas . tinggi atau $V_i = a\,.\,t$

$V_i = luas\ lingkaran\,.\,tinggi$

$V_i = \pi r^2\,.\,t = \pi\ (\ \ \dots\ \ )^2(\ \ \dots\ \ )$

4. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\ \ \dots\ \ )^2(\ \ \dots\ \ )$, bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah

$V_D = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\ \dots\ )^2(\ \dots\ \ )$, Ingat limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_c^d \pi\ (\ \dots\ )^2\ \ \dots$$

5. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$V_D = \int_c^d \pi\,(\ \ldots\ )^2\ \ \ldots$$

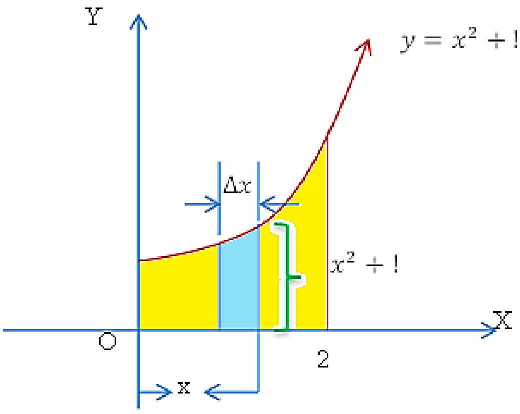
## Cek Pemahaman

1. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2 + 1$, sumbu $x$, sumbu y, dan garis $x = 2$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu x, tentukan volume benda putar tersebut.

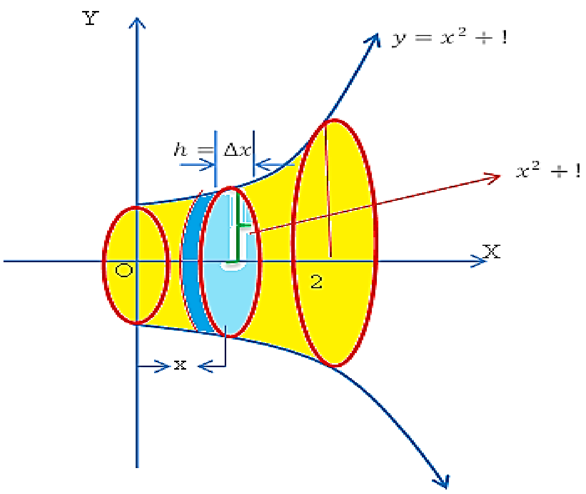
**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D, sebagai berikut:




b. Gambarlah hasil perputaran daerah D, sebagai berikut:



c. Berdasarkan gambar tentukan batas daerah D = [0 , 2], jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …

d. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

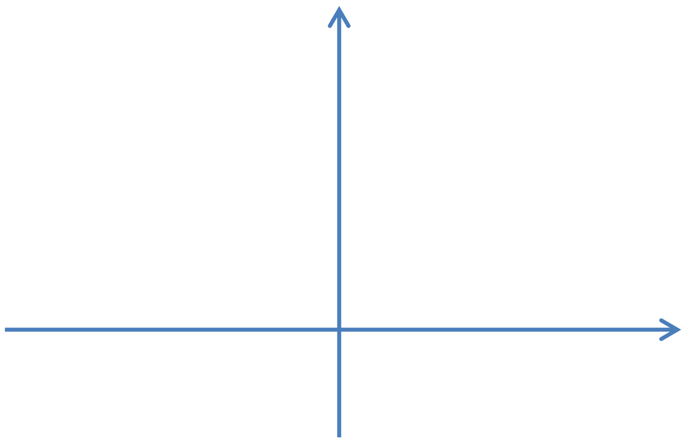
$V_D = \pi r^2 . t = \pi ( \; ... \; )^2 ( \; ... \; ) = \int_a^b \pi ( \; ... \; )^2$ ... (Silahkan dicari!)

2. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2$, sumbu y, dan garis $y = 2$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar tersebut.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D, dan gambar pula hasil perputaran daerah D tersebut.



b. Tentukan batas daerah D, dengan terlebih dahulu mengubah fungsi $y = x^2$ menjadi fungsi $x = f(y) =$ ...

c. Tentukan jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …

d. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

$V_D = \pi r^2 . t = \pi ( \; ... \; )^2 ( \; ... \; ) = \int_c^d \pi ( \; ... \; )^2$ ... (Silahkan dicari!)

## 4.2.2 VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE CINCIN

### 4.2.2.a METODE CINCIN DENGAN SUMBU PUTAR SUMBU X

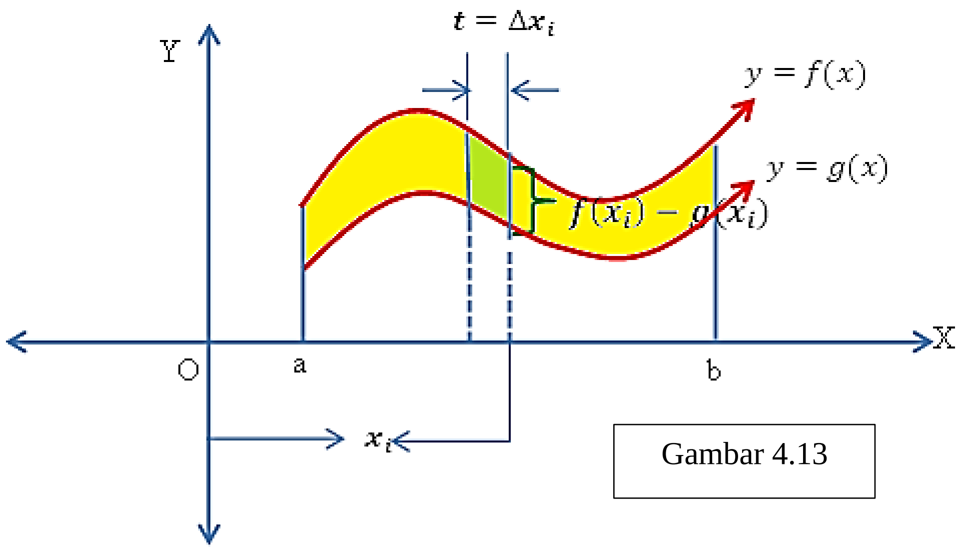
Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis: V = luas alas . Tinggi = a.t.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2.3**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $y = f(x)$ dan $y = g(x)$ dengan $f(x) \geq g(x)$ pada interval $[a\,, b]$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu $x$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

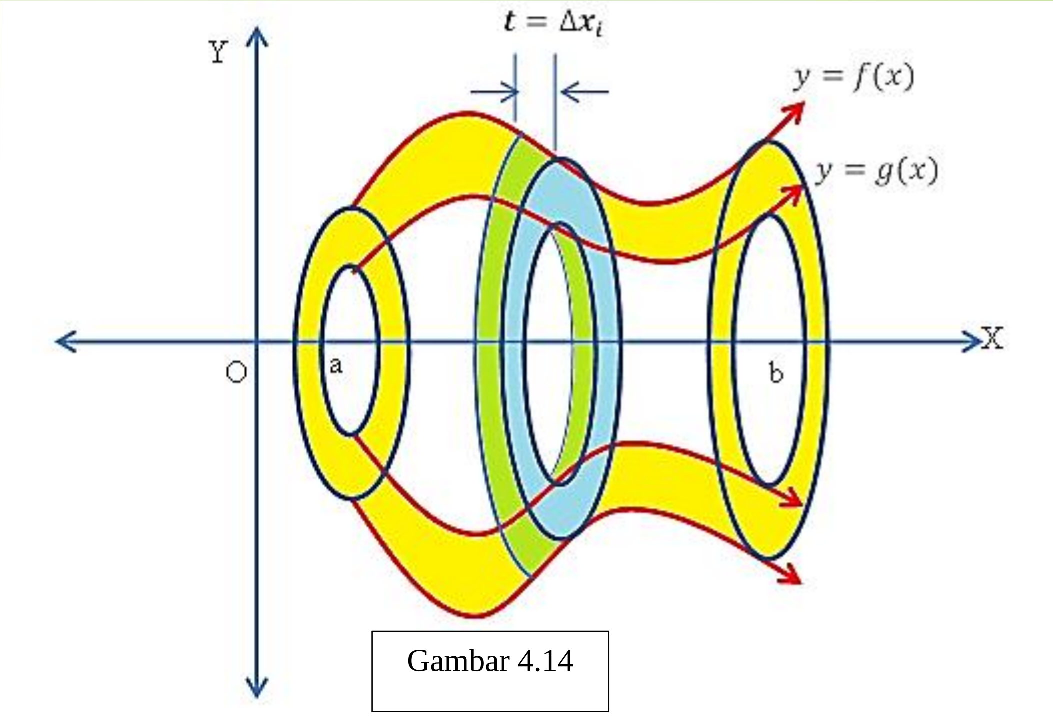
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Cincin**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[a\,, b]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, seperti terlihat pada Gambar 4.13 di bawah ini.



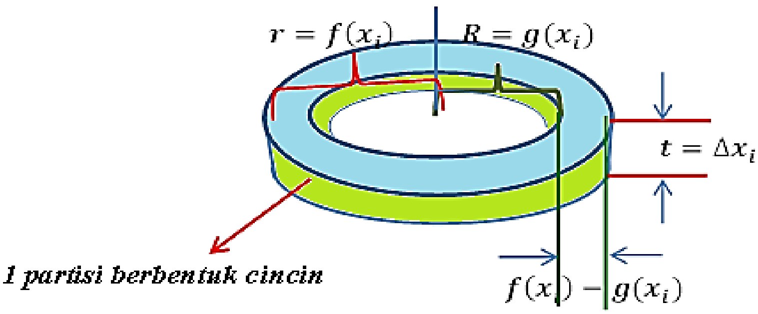
Gambar 4.13

2. Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $x$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.14 berikut. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[x_{i-1}\,, x_i]$.




Gambar 4.14

3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk cincin, seperti terlihat pada Gambar 4.15 di bawah ini. Bentuk cincin tersebut mempunyai jari-jari $(r^2 - R^2)$ atau $f^2(x_i) - g^2(x_i)$ dan tebalnya ( tinggi) $\Delta x_i$.




Gambar 4.15

Sehingga volume cincin lingkaran tersebut adalah luas alas . tinggi atau $V_i = a\,.\,t$

$V_i = luas\ lingkaran\,.\,tinggi$

$V_i = \pi\ (r^2 - R^2)\,.\,t = \pi\ (\quad \dots \quad - \quad \dots \quad )\ (\ \dots\ )$

4. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} \pi \left( \quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad \right)\left( \ \ldots \ \right)$, bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah:

$V_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left( \quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad \right)\left( \ \ldots \ \right)$, Ingat limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_a^b \pi \left( \quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad \right) \ldots$$

5. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$\boxed{V_D = \int_a^b \pi \left( \quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad \right) \ldots}$$

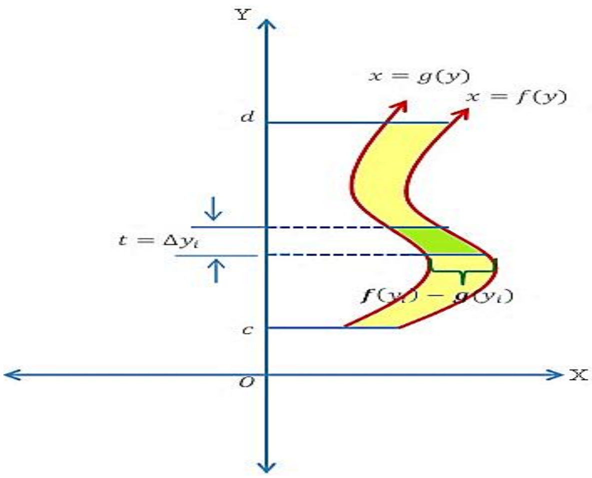
### 4.2.2.b METODE CINCIN DENGAN SUMBU PUTAR SUMBU Y

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2.4**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $x = f(y)$ dan $x = g(y)$ dengan $f(y) \geq g(y)$ pada interval $[c\ ,d]$, garis $y = c$, garis $y = d$ dan sumbu $y$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

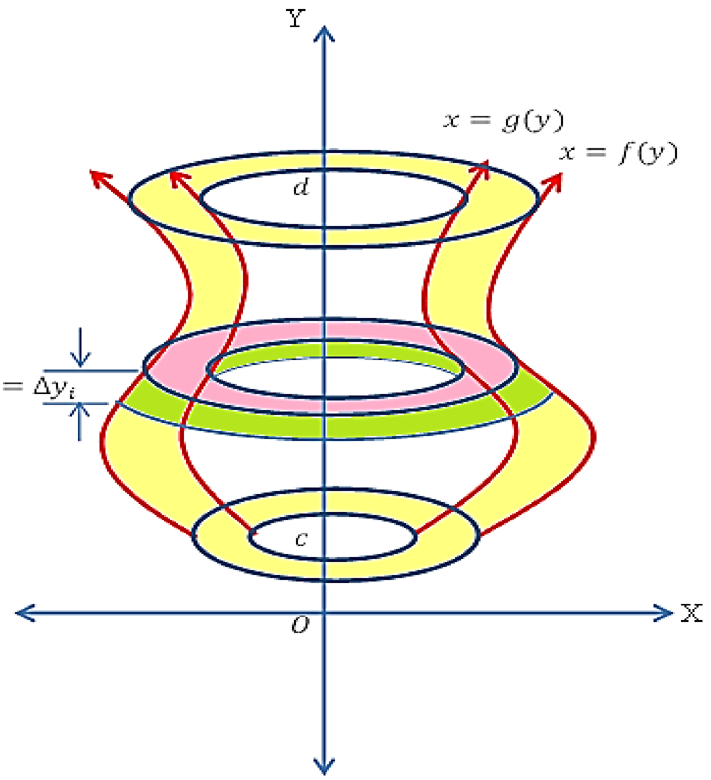
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Cincin**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[c\ ,d]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $c = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{i-1} < y_i < \cdots < y_n = d$, seperti terlihat pada Gambar 4.16 di bawah ini.



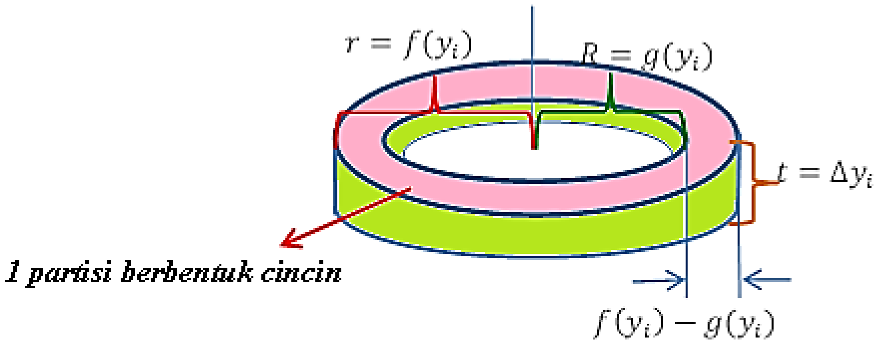

Gambar 4.16

2. Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.17 berikut. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[y_{i-1}, y_i]$.




Gambar 4.17

3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk cincin lingkaran, seperti terlihat pada Gambar 4.18 di bawah ini. Bentuk cincin lingkaran tersebut mempunyai jari-jari $f(r^2 - R^2)$ atau $f^2(y_i) - g^2(y_i)$ dan tebalnya ( tinggi) $\Delta y_i$.




Gambar 4.18

Sehingga volume cincin lingkaran tersebut adalah luas alas . tinggi atau $V_i = a \, . \, t$

$V_i = luas\ lingkaran\ .\ tinggi$

$V_i = \pi\ (r^2 - R^2)\ .\ t = \pi\ (\quad \dots \quad - \quad \dots \quad)\ (\ \dots\ )$

4. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)(\ \ldots\ )$, bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah:

$V_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)(\ \ldots\ )$, Ingat limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_c^d \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)\ \ldots$$

5. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$V_D = \int_c^d \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)\ \ldots$$

## Cek Pemahaman

3. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2$, dan $y = 2x$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu x, tentukan volume benda putar yang terjadi tersebut.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D.
b. Tentukan batas daerah D (batas integral), dengan cara mencari perpotongan antara dua kurva.
c. Gambarlah hasil perputaran daerah D yang diputar mengelilingi sumbu x.
d. Tentukan jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …
e. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

$$V_D = \pi\ (r^2 - R^2).t = \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)(\ \ldots\ ) = \int_a^b \pi\ (\quad \ldots \quad - \quad \ldots \quad)\ \ldots$$

(Silahkan dicari!)

4. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2$, dan $y = 2x$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar yang terjadi tersebut.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D yang diputar mengelilingi sumbu y.

b. Karena sumbu putarnya sumbu y, maka nyatakan kedua fungsi tersebut menjadi fungsi $x = f(y)$. Kemudian tentukan batas daerah D (batas integral), dengan cara mencari perpotongan antara kedua kurva.

c. Gambarlah hasil perputaran daerah D yang diputar mengelilingi sumbu y.

d. Tentukan jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …

e. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

$$V_D = \pi\,(r^2 - R^2).t = \pi\,(\;\dots\; - \;\dots\;)(\;\dots\;) = \int_c^d \pi\,(\;\dots\; - \;\dots\;)\;\dots$$

(Silahkan dicari!)

## 4.2.3 VOLUME BENDA PUTAR DENGAN METODE KULIT SILINDER

### 4.2.3.a METODE KULIT SILINDER DIBATASI 1 KURVA SUMBU PUTAR Sb Y

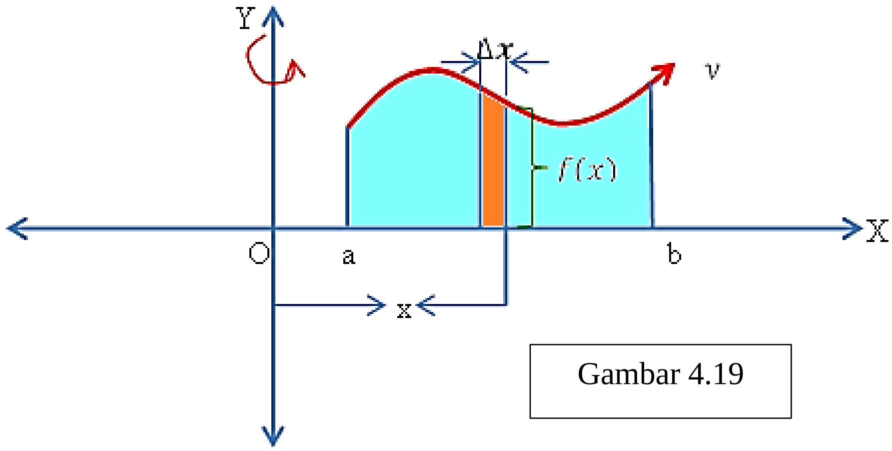
Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis: V = luas alas . Tinggi = a.t.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2.5**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $y = f(x)$ dengan $f(x) \geq 0$ pada interval $[a\,, b]$, garis $x = a$, garis $x = b$ dan sumbu $x$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

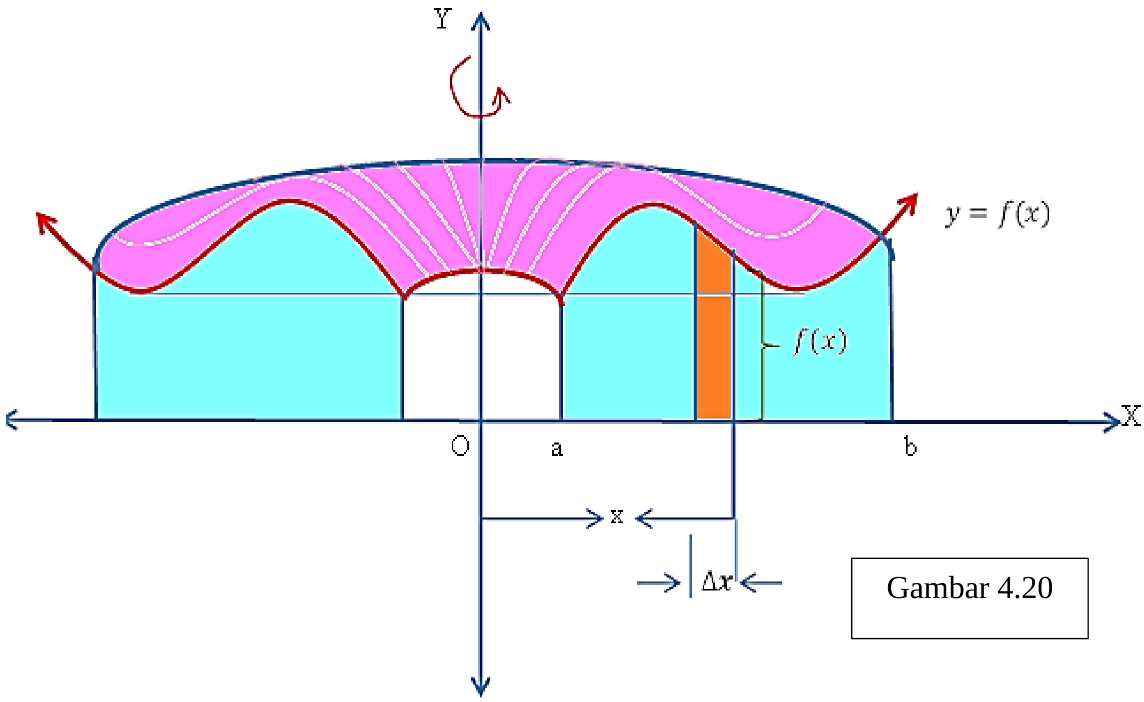
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Silinder**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[a\ ,b]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, seperti terlihat pada Gambar 4.19 di bawah ini.



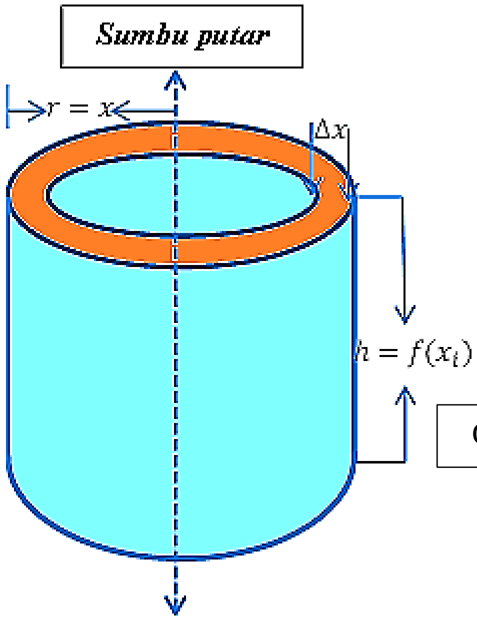

Gambar 4.19

2. Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.20 berikut. Perhatikan partisi ke-i pada interval $[x_{i-1}\ , x_i]$.



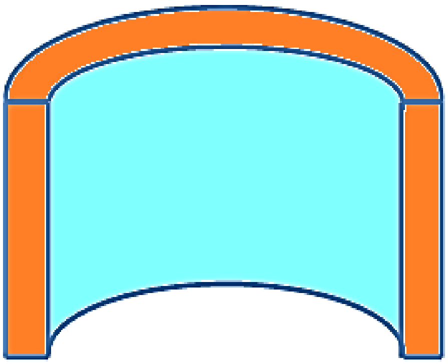

Gambar 4.20

3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk silinder, seperti terlihat pada Gambar 4.21 di bawah ini. Bentuk silinder tersebut mempunyai jari-jari $r = x$, tebalnya $\Delta x_i$, dan tinggi silinder $h = f(x_i)$.

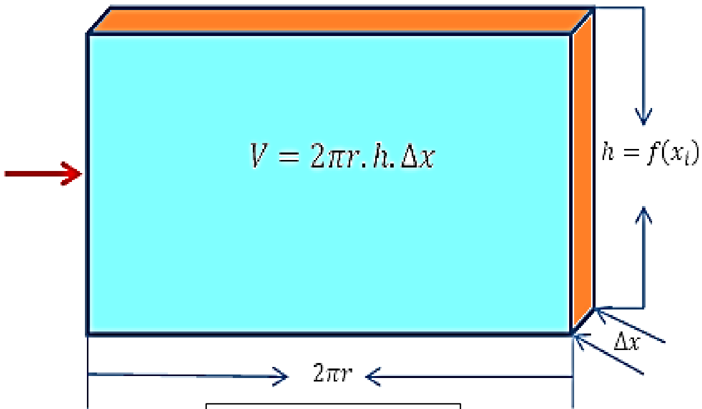



Gambar 4.21

Untuk dapat menentukan volume silinder pada Gambar 4.21 di atas, akan lebih mudah bila silinder tersebut dibuka, sehingga menjadi bentuk balok dengan ukuran seperti terlihat pada Gambar 4.22a dan 4.22b di bawah ini.



Gambar 4.22a




Gambar 4.22b

Sehingga volume silinder = volume balok = panjang . lebar . tinggi, dimana panjang balok = keliling alas silinder = $2\pi r$, tebal = lebar balok = $\Delta x$, dan tinggi = $h = f(x)$.

$V_i = p \, . \, l \, . \, h$

$V_i = panjang \, . \, lebar \, . \, tinggi = 2\pi r \, . \, \Delta x \, . \, h = 2\pi r \, . \, h \, . \, \Delta x = 2\pi \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

4. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} 2\pi \, ( \ \ldots \ ) \, ( \quad \ldots \quad ) \, \Delta x$ , bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah:

$V_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi \, ( \ \ldots \ ) \, ( \quad \ldots \quad ) \, \Delta x$, Ingat limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_a^b 2\pi \, ( \ \ldots \ ) \ ( \ \ldots \ ) \ \Delta x$$

5. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$V_D = \int_a^b 2\pi \, ( \ \ldots \ ) \, ( \quad \ldots \quad ) \, \Delta x$$

## 4.2.3.b METODE KULIT SILINDER DIBATASI 2 KURVA SUMBU PUTAR Sb Y

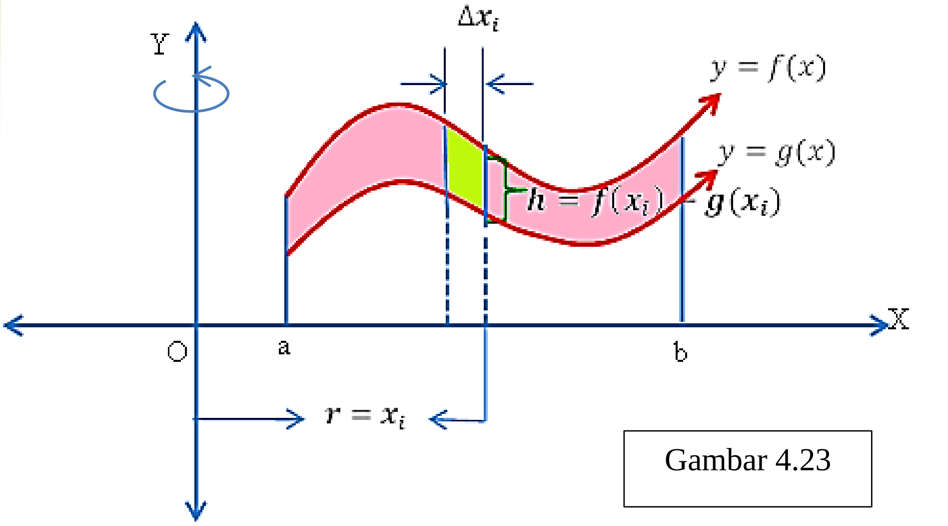
Secara umum, volume dinyatakan sebagai luas alas dikali tinggi. Secara matematis, ditulis: V = luas alas . Tinggi = a.t.

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.2.6**

Misalkan D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu $y = f(x)$, dan $y = g(x)$, dengan $f(x) \geq g(x)$ pada interval $[a \, , b]$, garis $x = a$ , garis $x = b$ dan sumbu $x$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $y$ sebesar $360^0$, maka volume benda putar yang terjadi dapat ditentukan sebagai berikut.

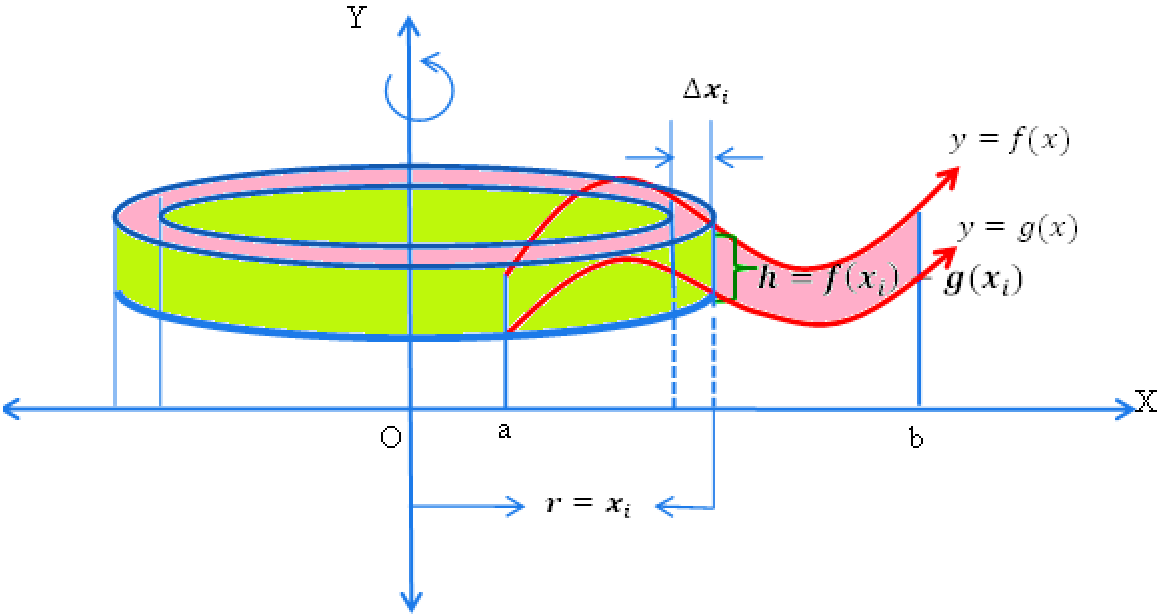
**Penemuan Rumus Volume Benda Putar dengan Metode Kulit Silinder**

1. Gambarlah daerah D, kemudian bagian interval $[a \, , b]$ menjadi selang yang sama panjang. Partisilah interval tersebut menjadi, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b$, seperti terlihat pada Gambar 4.23 di bawah ini.




Gambar 4.23

2. Hasil perputaran partisi ke-i adalah sebagai berikut:




3. Perhatikan satu partisi ke-i, hasil perpuataran satu partisi berbentuk silinder (seperti Gambar 4.15 sebelumnya), dengan cara sama bila silinder tersebut dibuka akan menjadi balok dengan ukuran sebagai berikut: jari-jari $r = x_i$, sehingga panjang balok = keliling silinder = $2\pi r$, tebal = lebar balok = $\Delta x_i$, dan tinggi silinder $h = f(x_i) - g(x_i)$.

   Sehingga volume silinder = volume balok = panjang . lebar . tinggi

   $V_i = p \,.\, l \,.\, h$

   $V_i = panjang \,.\, lebar \,.\, tinggi$

   $V_i = 2\pi r \,.\, \Delta x \,.\, h = 2\pi r \,.\, h \,.\, \Delta x = 2\pi \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

3. Jadi volume seluruhnya adalah sebagai berikut.

$$V_D = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

$V_D = \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ (\ \dots\ )\ (\quad \dots\ -\ \dots\quad )\ \Delta x$ , bila diambil $n \to \infty$, maka volume daerah D adalah:

$V_D = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi\ (\ \dots\ )\ (\quad \dots\ -\ \dots\quad )\ \Delta x$, limit sigma oleh Riemann dinotasikan:

$$V_D = \int_a^b 2\pi\ (\ \dots\ )\ (\quad \dots\ -\ \dots\quad )\ \Delta x$$

4. Kesimpulan volume benda putar tersebut adalah sebagai berikut.

$$V_D = \int_a^b 2\pi\ (\ \dots\ )\ (\quad \dots\ -\ \dots\quad )\ \Delta x$$

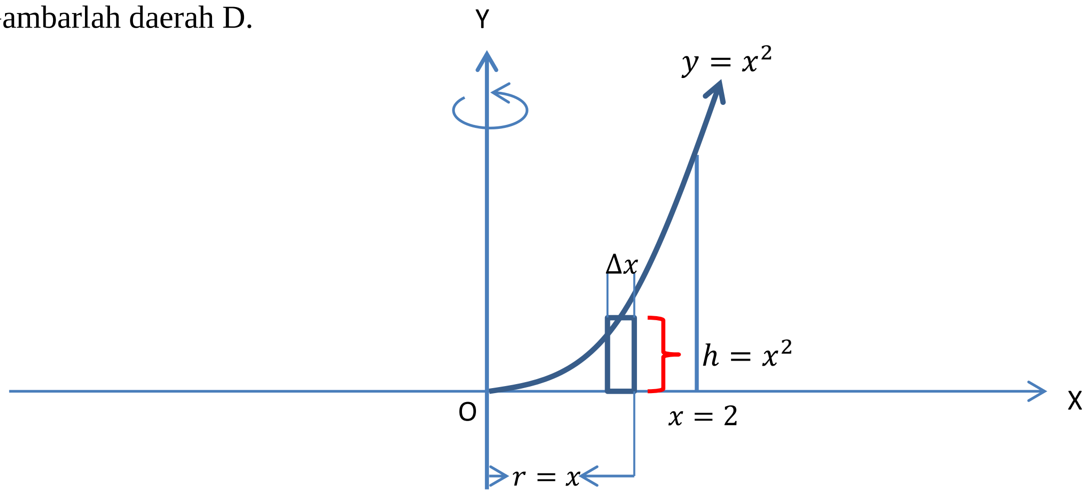
## Cek Pemahaman

5. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2$, $x = 2$, dan sumbu $x$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar yang terjadi tersebut.

**Penyelesaian:**

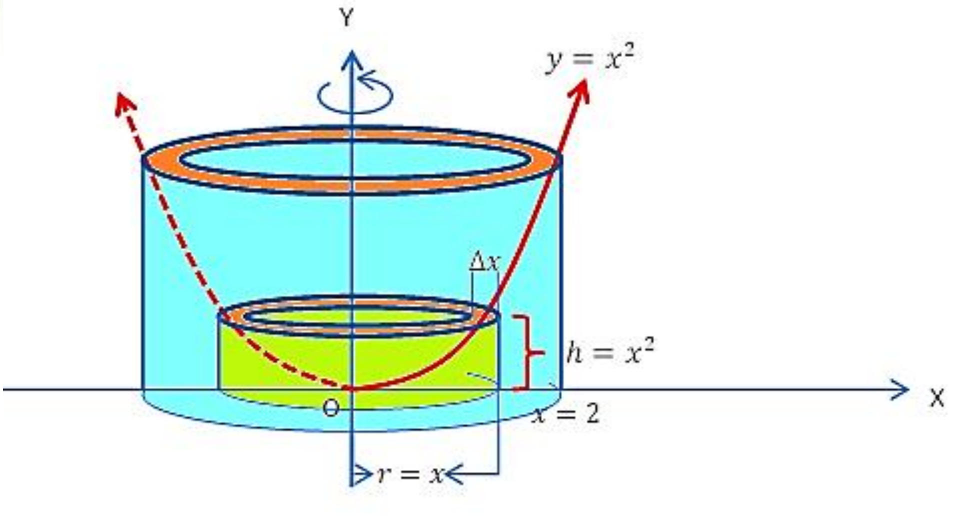
Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D.



b. Tentukan batas daerah D yang merupakan batas integral.

c. Gambarlah hasil perputaran daerah D tersebut, seperti berikut:




d. Tentukan jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …

e. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

$V_i = panjang\ .lebar\ .tinggi = 2\pi r\ .\Delta x\ .h = 2\pi r\ .h\ .\Delta x = 2\pi \ldots\ \ldots\ \ldots$

$V_D = \int_a^b 2\pi\ (\ \ldots\ )\ (\ \ldots\ )\ \Delta x$ (Silahkan dicari!)

6. Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2$, dan $y = x$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu y, tentukan volume benda putar yang terjadi tersebut.

**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D yang diputar mengelilingi sumbu y.

b. Tentukan batas daerah D yang merupakan batas integral.

c. Gambarlah hasil perputaran daerah D yang diputar mengelilingi sumbu y.

d. Tentukan jari-jari = r = … , dan tinggi = h = …

e. Tentukan rumus volume benda putar dan hitunglah hasilnya.

$V_i = panjang\ .lebar\ .tinggi = 2\pi r\ .\Delta x\ .h = 2\pi r\ .h\ .\Delta x = 2\pi \ldots\ \ldots\ \ldots$

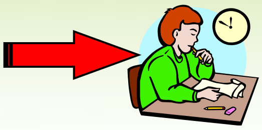
$$V_D = \int_a^b 2\pi\ (\ \ldots\ )\ (\ \ldots\ )\ \Delta x$$

(Silahkan dicari!)

## LEMBAR KERJA-4.2

1. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = \sqrt{x}$, garis x = 1, garis x = 4, dan sumbu x. Ditanyakan:
   a. Gambar daerah D tersebut.
   b. Hitunglah volume benda putar yang terjadi bila diputar mengelilingi sumbu x (gunakan metode cakram).
2. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $x = 4y - y^2$, dan sumbu y. Ditanyakan:
   a. Gambar daerah D tersebut.
   b. Hitunglah volume benda putar yang terjadi bila diputar mengelilingi sumbu y (gunakan metode cakram).
3. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^3$. Hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan metode cincin, bila daerah D diputar mengelilingi
   a. Sumbu x
   b. Sumbu y
   c. Garis y = -1
   d. Garis y = 3
4. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = 4x - x^2$ dan garis $x + y = 4$. Hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan metode kulit silinder, bila daerah D diputar mengelilingi
   a. Sumbu y
   b. Garis x = -1
   c. Garis x = 6

****OOO****



## UJI KOMPETENSI-4.2

**A. Pilihan Ganda:Pilihalah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = 3x - 1$, dan garis $x = 3$, dan diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360^0$ adalah … satuan volume.

   a. $21\frac{2}{3}\pi$      d. $64\ \pi$

   b. $38\frac{2}{3}\ \pi$      e. $81\ \pi$

   c. $43\ \pi$

2. Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $y = 3 + 2x - x^2$, sumbu x, sumbu y dan diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360^0$ adalah … satuan volume.

   a. $\frac{153}{5}\pi$      d. $67\ \pi$

   b. $97\frac{1}{2}\ \pi$      e. $91\ \pi$

   c. $103\ \pi$

3. Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = \frac{2}{y}$, garis $y = 1$, garis $y = 4$, dan sumbu y, bila diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360^0$ adalah … satuan volume.

   a. $\frac{5}{2}\pi$      d. $3\ \pi$

   b. $3\frac{1}{2}\ \pi$      e. $6\ \pi$

   c. $4\ \pi$

4. Volume benda putar yang dibatasi oleh kurva $x = 2\sqrt{y}$, garis $y = 4$, dan sumbu y, bila diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360^0$ adalah … satuan volume.

   a. $\frac{45}{2}\pi$      d. $37\ \pi$

   b. $33\frac{1}{2}\ \pi$      e. $32\ \pi$

   c. $43\ \pi$

5. Volume benda putar bila daerah yang dibatasi kurva $y = -x^2 + 4$ dan $y = -2x + 4$ diputar $360^0$ mengelilingi sumbu y adalah … satuan volume.

   a.$8\pi$

b. $\frac{13}{2}\pi$

c. $4\pi$

d. $\frac{8}{3}\pi$

e. $\frac{5}{4}\pi$

6. Volume benda putar yang terjadi, jika daerah antara kurva y = $x^2$ + 1 dan y = x + 3, diputar mengelilingi sumbu x adalah …satuan volum.
   a. $\frac{67}{5}\pi$
   b. $\frac{117}{5}\pi$
   c. $\frac{107}{5}\pi$
   d. $\frac{133}{5}\pi$
   e. $\frac{183}{5}\pi$

7. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva y = $2x^{\frac{1}{2}}$, garis y = $\frac{1}{2}x$ dan garis x = 4 diputar $360^0$ terhadap sumbu x adalah ….satuan volume.
   a. $23\frac{1}{3}\pi$
   b. $24\frac{2}{3}\pi$
   c. $26\frac{2}{3}\pi$
   d. $27\frac{1}{3}\pi$
   e. $27\frac{2}{3}\pi$

8. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2$ dan garis $x + y = 2$, bila diputar $360^0$ mengelilingi sumbu x adalah … satuan volum.
   a. $15\frac{2}{3}\pi$
   b. $15\frac{2}{5}\pi$
   d. $14\frac{2}{5}\pi$
   e. $10\frac{3}{5}\pi$

c. $14\frac{3}{5}\pi$

9. Volume benda putar yang terjadi jika daerah yang dibatasi oleh $y = 2x^2 + 1$, $x = 1$, sumbu x, dan sumbu y diputar $360^0$ mengelilingi sumbu x adalah … satuan volum.

   a. $\frac{47}{15}\pi$

   b. $\frac{12}{15}\pi$

   c. $2\pi$

   d. $\frac{27}{15}\pi$

   e. $4\pi$

10. Volume benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = 9 – x^2$ dan $y = 5$ di kuadran I, diputar mengelilingi sumbu y sejauh $360^0$ adalah ….

   a. $4\pi$

   b. $\frac{16}{3}\pi$

   c. $8\pi$

   d. $16\pi$

   e. $\frac{92}{3}\pi$

11. Volume benda putar yang terjadi bila daerah yang dibatasi oleh kurva $y = x^2 – 1$ dan sumbu x dari x=1, x = –1, diputar mengelilingi sumbu x sejauh $360^0$ adalah ….

   a. $\frac{4}{15}\pi$

   b. $\frac{16}{15}\pi$

   c. $\frac{8}{15}\pi$

   d. $\frac{24}{15}\pi$

   e. $\frac{32}{15}\pi$

12. Volume benda putar yang terjadi bila daerah pada kuadran pertama yang dibatasi oleh kurva $y = 1 - \frac{x^2}{4}$ , sumbu x, sumbu y diputar mengelilingi sumbu x adalah … satuan volume.

   a. $\frac{52}{15}\pi$

b. $\frac{16}{12}\pi$

c. $\frac{12}{15}\pi$

d. $\pi$

e. $\frac{16}{15}\pi$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

13. Hitunglah volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut ini diputar mengelilingi sumbu x !
    a. y = 3x – 1 ; x = 1 dan x = 4
    b. y = 4 $\sqrt{x}$ ; x = 0 dan x = 2
14. Hitunglah volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva berikut ini diputar mengelilingi sumbu y !
    a. x = $\sqrt{y}$ ; y = 0 dan y = 3
    b. y = 2 – x ; y = 2 dan y = 3
15. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = x^{2/3}$ dan $y = x^2$. Hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan metode cincin, bila daerah D diputar mengelilingi
    a. Sumbu x
    b. Sumbu y
    c. Garis y = -1
    d. Garis x = -2
16. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $x = -y^2 - 3y + 6$ dan garis $x + y = 3$. Hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan metode cincin, bila daerah D diputar mengelilingi.
    a. Sumbu y
    b. Garis x = -1
    c. Garis x = 10
17. Diketahui daerah D yang dibatasi grafik fungsi $y = \cos x$ , $y = \sin x$ , garis $x = \frac{1}{4}\pi$, dan sumbu y. Hitunglah volume benda putar yang terjadi dengan metode kulit silinder, bila daerah D diputar mengelilingi.

a. Sumbu y

b. Garis x = -1

c. Garis x = 2

****OOO****

# BAB IV-3
# VOLUME BENDA DENGAN METODE IRISAN SEJAJAR, PANJANG KURVA, DAN LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

### *TUJUAN PEMBELAJARAN:*

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung volume benda padat, dengan menggunakan metode irisan sejajar.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung panjang kurva.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung luas permukaan benda putar.

***FOKUS BAB:***

***4.3 Volume Benda: Metode Irisan Benda Padat***

***4.4 Panjang Kurva***

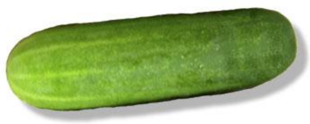
***4.5 Luas Permukaan benda putar***

### *PETA KONSEP*

## PENGANTAR

Banyak masalah-masalah dalam kehidupan sehari-hari kita yang penyelesaiannya menggunakan integral. Pada pembahasan sebelumnya telah dibahas aplikasi integral untuk menghitung luas bidang datar untuk daerah yang tidak beraruran, juga aplikasi integral untuk menghitung volume benda putar untuk benda-benda yang tidak beraturan. Sedangkan pada pembahasan kali ini akan dibahas aplikasi integral untuk menghitung volume benda padat untuk benda-benda yang tidak beraturan, juga untuk menghitung panjang kurva, serta untuk menghitung luas permukaan benda putar.

Aplikasi integral ini digunakan untuk menghitung volume benda padat yang tidak beraturan. Sedangkan pada benda-benda padat beraturan (misal bola, tabung, kubus, balok, limas, prisma), maka volume benda-benda tersebut dapat langsung dihitung dengan menggunakan rumus-rumus volume yang telah ada, sehingga tidak diperlukan pendekatan integral. Tetapi bila ada benda yang tidak beraturan, misalkan diminta untuk mengitung volume ketimun seperti Gambar 4.24 di samping, maka rumus volume ketimun harus dicari terlebih dahulu, karena belum ditemukan rumus volume ketimun yang merupakan benda yang tidak beraturan. Rumus volume ketimun tersebut hanya dapat ditemukan jika menggunakan pendekatan integral.



Gambar 4.24

Aplikasi integral selanjutnya digunakan untuk menghitung panjang kurva atau keliling dari suatu bidang datar. Bila bidang datar yang beraturan (misal segitiga, persegi, persegi panjang, layang-layang, lingkaran, dll), maka rumus untuk menghitung keliling atau panjang kurva dari bidang-bidang tersebut dapat menggunakan rumus-rumus keliling atau panjang kurva yang telah ditemukan. Namun bila bidang datar yang tidak beraturan, maka rumus keliling atau panjang kurva harus ditemukan terlebih dahulu dengan menggunakan pendekatan integral. Misalkan diminta untuk menghitung berapa panjang baja yang diperlukan untuk membuat lengkungan pada Gambar 4.25 di samping, maka tidak dapat secara langsung dihtung tapi harus dicari rumus kelilingnya terlebih dahulu.

Gambar 4.25

Sedangkan aplikasi integral berikutnya dapat digunakan untuk menghitung luas permukaan benda–benda ruang. Bila benda ruang yang beraturan (misal luas permukaan kubus, balok, bola, tabung, limas, dan prisma), maka rumus luas permukaan telah ditemukan sebelumnya. Namun bila akan menghitung luas permukaan benda ruang berbentuk lampion seperti Gambar 4.26 di samping, maka harus ditemukan terlebih dahulu rumus luas permukaan dengan menggunakan pendekatan integral. Karena bentuk lampion merupakan bentuk benda ruang yang tidak beraturan.

Gambar 4.26

## 4.3 VOLUME BENDA DENGAN METODE IRISAN SEJAJAR

Perhatikan kembali benda putar pada pokok bahasan sebelumnya. Benda putar tersebut merupakan suatu benda padat dengan irisan sejajar yang tegak lurus sumbu putarnya berbentuk cakram atau cincin lingkaran. Perumusan keadaan ini ialah bila irisan sejajar yang tegak lurus suatu sumbu tertentu. Membentuk suatu bangun geometri yang luasnya bergantung dari letak suatu titik pada sumbunya.

Bila diketahui benda padat, misalnya kita akan menghitung volume benda padat ketimun (seperti Gambar 4.27.a di samping, maka perlu ditemukan terlebih dahulu rumus volume ketimun tersebut. Cara untuk menemukan rumus volume ketimun adalah sebagai berikut.

1) Ketimun dipotong-potong dengan pisau tegak lurus dengan ketimunnya, sehingga diperoleh potongan ketimun seperti Gambar 4.27.a di samping ini.

Gambar 4.27.a

2) Untuk menghitung volume ketimun seluruhnya, maka ambil perwakilan satu potong ketimun atau seiris ketimun, dimana bentuk seiris ketimun itu berbentuk cakram atau tabung seperti Gambar 4.27.b

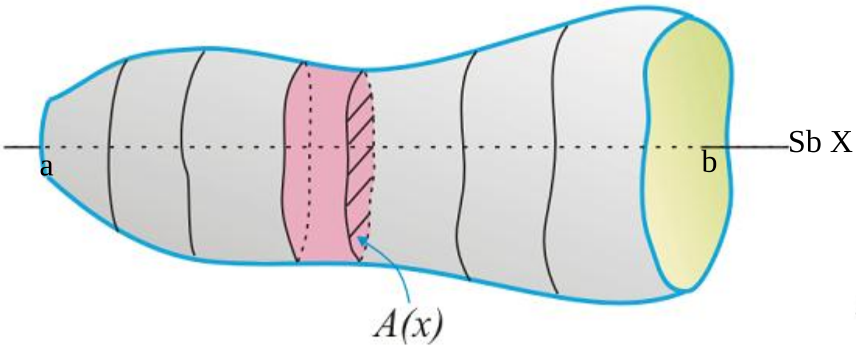
Gambar 4.27.b

sehingga volume seiris ketimun adalah luas alas.tinggi = A(x). t; Jadi volume ketimun seluruhnya = $\sum_{i=1}^{n} A(x).t$

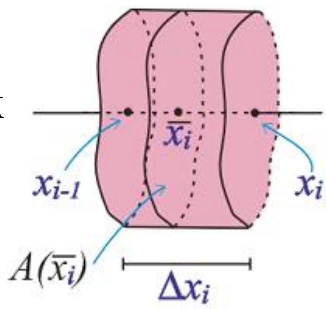
## BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4-3

**Penemuan Rumus Volume Benda Padat Dengan Metode Irisan Sejajar**

Diketahui suatu benda padat seperti Gambar 4.28.a berikut, tentukan rumus volume benda padat tersebut.



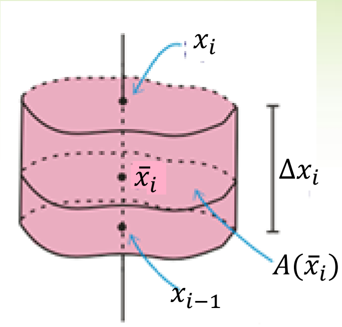

Gambar 4.28.a




Gambar 4.28.b

Langkah-lanhkag menemukan rumus volume benda padat tersebut di atas adalah sebagai berikut.

1) Benda padat tersebut letakkan di atas suatu sumbu tertentu, misalnya sumbu X sehingga benda tersebut terletak diantara x = a dan x = b. Buatlah irisan sejajar benda dan tegak lurus terhadap sumbu X, sehingga irisan sejajar berbentuk suatu daerah yang luasnya merupakan fungsi kontinu dari x, seperti Gambar 4.28.b.
2) Bagilah benda padat tersebut menjadi beberapa irisan sejajar benda dan tegak lurus dengan sumbu X, sehingga satun bagian ke-i seperti terlihat pada Gambar 4.28.b.
3) Buatlah partisi Δ untuk [a,b] dengan titik-titik pembagian sebagai berikut:
   $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ \dots \ < x_{i-1} < x_i < \ \dots < x_n = b$
4) Ambil satu bagian ke-i seperti terlihat pada Gambar 4.28.c, bentuknya berupa benda ruang dengan tinggi $\Delta\bar{x}_i = x_i - x_{i-1}$ pada $x_{i-1} \le \bar{x}_i \le x_i$, dan luas alas merupakan luas penampang irisan yang tegak lurus sumbu X adalah $A(\bar{x}_i)$, sehingga rumus volume benda partisi ke-i = luas alas . tinggi
   atau $\Delta V_i =$ ... $\Delta\bar{x}_i$



Gambar 4.28.c

5) Carilah nilai hampiran untuk volume benda padat tersebut adalah:

$$\text{Volume benda padat seluruhnya} = \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i$$

6) Jumlah pada ruas paling kanan merupakan suatu jumlah Riemann yang mempunyai limit, kerena fungsi $A(x)$ kontinu pada [a,b]. Akibatnya, volume benda padat tersebut adalah:

$$V = \lim_{n \to \sim} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i = \int_a^b \quad \ldots \quad dx$$

Dengan demikian kita mempunyai rumus volume benda padat dengan metode irisan sejajar sebagai berikut:

**Teorema, volume benda padat dengan metode irisan sejajar**

Misalkan suatu benda padat terletak di antara dua bidang yang tegak lurus sumbu X dari $x = a$ sampai $x = b$. Jika luas penampang irisan antara bidang yang tegak lurus sumbu X dengan benda padat itu adalah $A(x)$, pada $a \leq x \leq b$ dengan A kontinu pada [a,b], maka volume benda padat itu adalah:

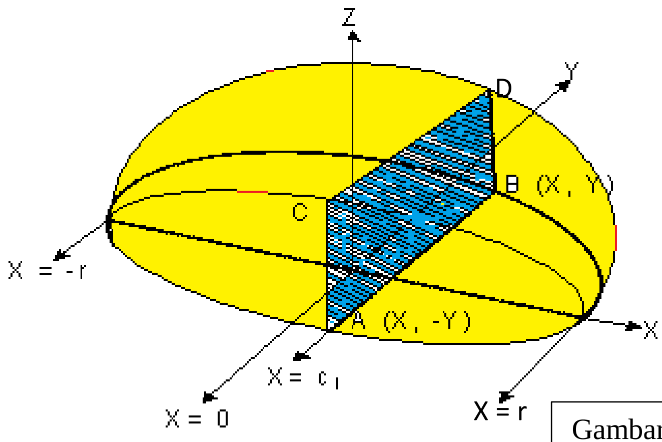
$$V = \lim_{n \to \sim} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i = \int_a^b \quad \ldots \quad dx$$

## Cek Pemahaman

Diketahui alas suatu benda padat adalah lingkaran berjari-jari r > 0. Jika irisan sejajar antara bidang yang tegak lurus pada garis tengah yang tetap berbentuk persegi, hitunglah volume benda padat itu.

**Langkah-langkah penyelesaian:**

1) Gambar 4.29 adalah benda padat tersebut, seperti berikut.




Gambar 4.29

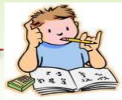
2) Misalkan persamaan lingkaran yang diketahui adalah: $x^2 + y^2 = r^2$, dengan $r > 0$ jika $-r \leq x \leq r$, maka penampang irisan antara bidang yang tegak lurus dengan sumbu X berbentuk persegi dengan sisi-sisinya $AB = AC = BD = CD$. Jika dimisalkan koordinat $A(x, -y)$ dan $B(x, y)$, maka panjang sisi persegi adalah $2y = 2\sqrt{r^2 - x^2}$.

3) Tentukan luas penampang irisan sejajar yang tegak lurus dengan sumbu X, atau luas persegi ABCD $= A(x) = 2y$ ... $=$ ... ... , yang merupakan suatu fungsi kontinu pada [-r,r].

4) Hitunglah volume benda padat tersebut.

$$Volume = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} A(x)\, \Delta x_i = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta x_i$$

$$= \int_{-r}^{r} \ldots \, dx = \ \ldots$$



## LEMBAR KERJA-4.3

**Petunjuk: Kerjakan semua soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1. Suatu benda padat mempunyai lingkaran alas yang berjari-jari 4 satuan. Cari volume benda padat itu, jika setiap bidang irisan yang tegak lurus pada garis tengah yang tetap merupakan setengah lingkaran.
2. Suatu benda padat mempunyai alas berbentuk ellips dengan sumbu panjang 10 satuan dan sumbu pendek 8 satuan. Cari volume benda padat tersebut, jika setiap penampang irisan benda yang tegak lurus dengan sumbu panjang merupakan segitiga samakaki dengan tingginya 6 satuan.
3. Alas suatu benda padat merupakan daerah D yang dibatasi oleh $y = 1 - \frac{x^2}{4}$, sumbu X, dan sumbu Y. Cari volume benda padat tersebut, jika penampang irisan yang tegak lurus dengan sumbu X berbentuk persegi.
4. Alas suatu benda padat merupakan daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x}$ dan $y = x^2$. Cari volume benda padat tersebut, jika penampang irisan yang tegak lurus dengan sumbu X berbentuk lingkaran dengan garis tengahnya melintasi daerah D.
5. Alas suatu benda padat merupakan daerah D yang dibatasi oleh perabola $y^2 = 9x$ dan $x^2 = 9y$. Cari volume benda padat tersebut, jika penampang irisan yang tegak lurus dengan sumbu X berbentuk lingkaran dengan garis tengahnya melintasi daerah D.

****OOO****

## 4.4 PANJANG KURVA

Pada bahasan kali ini akan dibahas bagaimana rumus untuk menghitung panjang kurva atau keliling dari suatu bangun. Bila dalam kehidupan sehari-hari Anda diminta untuk menghitung berapa panjang kawat seperti Gambar 4.30 di samping. Caranya Anda cukup menyediakan meteran, kemudian luruskan kawat tersebut kemudian ukurlah dengan meteran, maka akan diketahui berapa panjang kawat tersebut.

Gambar 4.30

Namun bila Anda diminta untuk menghitung berapa panjang baja yang diperlukan untuk membuat lengkungan seperti Gambar 4.31 di samping. Maka Anda tidak akan dapat membetangkan baja tersebut untuk diukur panjangnya. Oleh karena itu, diperlukan pendekatan lain agar dapat mengukur panjang baja tanpa harus meluruskan baja tersebut. Pendekatan yang dapat digunakan adalah menggunakan pendekatan limit jumlah Reimann atau integral Reimann

Gambar 4.31

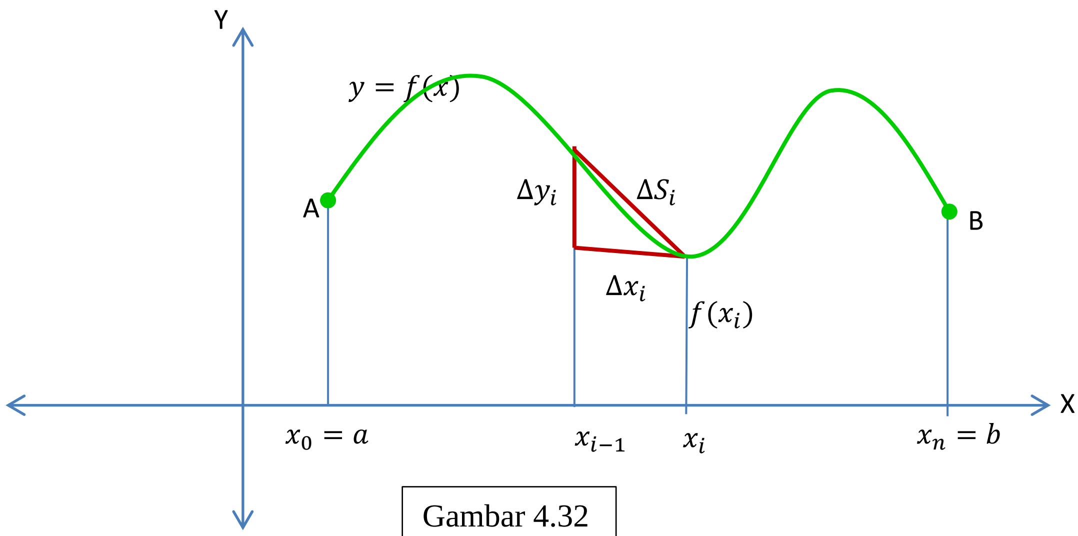
Pada bahasan ini akan dibahas bagaimana menemukan rumus panjang suatu kurva mulus (*smooth curve*). Suatu kurva mulus adalah grafik dari suatu fungsi kontinu yang derivatifnya juga kontinu (grafik tidak mempunyai titik-titik sudut). Kurva-kurva yang diamati adalah kurva yang muncul dalam persamaan kartesius, dan persamaan parameter.

## BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.4

**Penemuan Rumus Panjang Kurva**

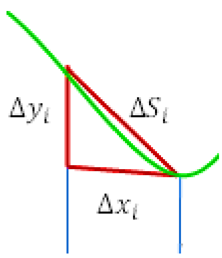
**4.4.1 PANJANG KURVA UNTUK PERSAMAAN KARTESIUS**

Bila diketahui suatu fungsi $y = f(x)$ yang kontinu terdiferensial pada interval tertutup [a, b]. Berapa panjang kurva dari titik A ke titik B. Untuk dapat menghitung panjang kurva tersebut, terlebih dahulu dihampiri dengan membagi interval menjadi n interval bagian dengan lebar $\Delta x_i$. Dimisalkan titik-titik pembagian dalam interval [a, b], yaitu $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$.




Gambar 4.32

Langkah-langkah penemuan rumus panjang kurva sebagai berikut.




1) Pada Gambar 4.32, perhatikan suatu potongan kecil kurva pada interval $[x_{i-i}\ ,\ x_i]$, buatlah bentuk segitiga dengan panjang sisi-sisinya masing-masing $\Delta x_i$ , $\Delta y_i$ , dan $\Delta S_i$ .
2) Bila pembagian n bagian semakin banyak, misal ambil $n \to \sim$, maka $\Delta x_i \to 0$, sehingga bentuk segitiga pada Gambar di samping dianggap berbentuk segitiga siku-siku, di mana $\Delta S_i$ merupakan panjang kurva yang akan dihitung panjangnya. Berarti menghitung panjang $\Delta S_i$ menggunakan teorema Pythagoras.

3) Hitunglah panjang $\Delta S_i$ dengan teorema Pythagoras, yaitu $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\ \dots\ )^2}$

Sehingga panjang kura AB atau $S_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\ \dots\ )^2}$

4) Bagilah partisi-partisi tersebut semakin banyak dengan mengambil $n \to \sim$, atau $\Delta x_i \to 0$, sehingga panjang kurva AB menjadi

$S_{AB} = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\ \dots\ )^2}$

$S_{AB} = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (\ \frac{\dots}{\Delta x_i}\ )^2}\ \Delta x_i$

**Sehingga ada dua kasus yang menarik perhatian, antara lain:**

**Kasus I:** Apabila persamaan kurva itu adalah $y = f(x)$, pada $a \le x \le b$, maka rumus panjang kurva adalah:

> $\boldsymbol{S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\dots}{dx})^2}\ dx}$ , dimana $\boldsymbol{\frac{\dots}{dx}}$ merupakan turunan fungsi
>
> $y = f(x)$ terhadap variabel x

**Kasus II:** Apabila persamaan kurva itu $x = g(y)$, pada $c \le y \le d$, maka rumus panjang kurva adalah:

> $\boldsymbol{S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\dots}{dy})^2}\ dy}$ , dimana $\boldsymbol{\frac{\dots}{dy}}$ merupakan turunan fungsi
>
> $x = f(y)$ terhadap variabel y

### 4.4.2 PANJANG KURVA UNTUK PERSAMAAN PARAMETER

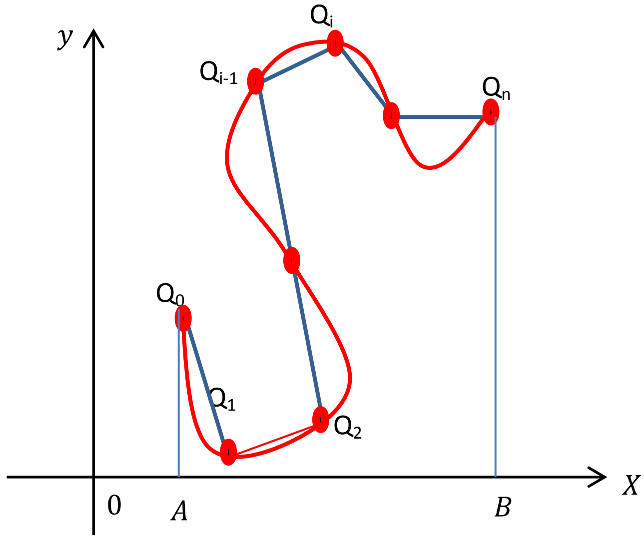
***Definisi***

Sebuah kurva rata disebut **mulus** apabila kurva itu ditentukan oleh persamaan-persamaan $x = f(t)$, $y = g(t)$, pada $a \le t \le b$, dengan ketentuan bahwa turunan-turunan $f'$dan $g'$ adalah kontinu pada $[a, b]$ sedangkan $f'(t)$ dan $g'(t)$ tidak bersama-sama nol di selang (a,b).

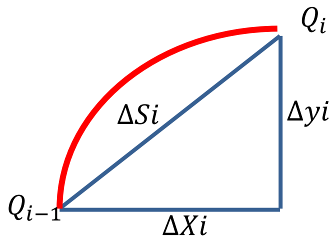
Akhirnya kita sampai pada pertanyaan utama. Apakah yang dimaksud dengan panjang sebuah kurva mulus dengan persamaan parameter $x = f(t), y = g(t)$, pada $a \le t \le b$?

**Langkah penyelesaian sebagai berikut:**

1) Gambarlah kurva kurva mulus dengan persamaan parameter $x = f(t), y = g(t)$, pada $a \leq t \leq b$.
2) Buat suatu partisi pada selang $[a, b]$ menjadi $n$ selang bagian dengan titik-titik $a = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b$.
3) Pembagian ini mengakibatkan pula baha kurva kita akan terbagi oleh titik-titik $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots, Q_{n-1}, Q_n$, seperti diperlihatkan pada Gambar 4.33 di bawah ini.



Gambar 4.33.a



Gambar 4.33.b

4) Buatlah aproksimasi kurva itu dengan segi banyak, perhatikan bagian ke-i seperti pada Gambar 4.33.b, kemudian hitung panjang kurvanya dan akhirnya ditarik limitnya apabila $\Delta x_i \to 0$, maka akan diperoleh panjang kurva pada interval $[Q_{i-1}, Q_i]$ atau $\Delta S_i$. Perhatikan kurva pada interval ke-i, dengan cara menarik garis dari $Q_{i-1}$ dan $Q_i$, maka akan terbentuk segitiga siku-siku, sehingga panjang kurva $\Delta S_i$ dapat dihitung dengan menggunakan teorema Pythagoras sebagai berikut;

   $$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\quad \ldots \quad)^2}$$

   dengan memperhatikan persamaan parameter $x = f(t), y = g(t)$, pada $a \leq t \leq b$, maka diperoleh:

   $$\Delta s_i = \sqrt{(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i})^2 + (\frac{\ldots}{\Delta t_i})^2} \ \Delta t_i$$

Sehingga panjang kurva seluruhnya atau S pada interval $[Q_0\,, Q_n]$ adalah sebagai berikut:

$$S_{AB} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i})^2 + (\frac{\dots}{\Delta t_i})^2}\ \Delta t_i$$

5) Sehingga panjang kurva seluruhnya, dengan mengambil $n \rightarrow \sim$ atau $\Delta x_i \rightarrow 0$, maka menjadi:

$$S_{AB} = \lim_{n\rightarrow\sim} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(\frac{\Delta x_i}{\Delta t_i})^2 + (\frac{\dots}{\Delta t_i})^2}\ \Delta t_i$$

$$S_{AB} = \int_a^b \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{\dots}{dt})^2}\ dt$$

## Cek Pemahaman

Bila diketahui lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$, buktikan bahwa keliling lingkaran tersebut adalah $2\pi r$.

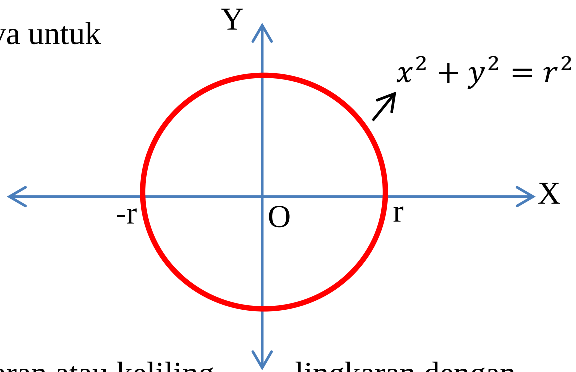
**Penyelesaian:**

1) Gambarlah lingkaran $x^2 + y^2 = r^2$
2) Dengan menggunakan rumus panjang kurva untuk persamaan kartesius, yaitu

   $S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\dots}{dx})^2}\ \ dx$ , dimana

   $\frac{\dots}{\boldsymbol{dx}}$ merupakan turunan fungsi

   $y = f(x)$ terhadap variabel x.




3) Sebelum menghitung panjang kurva lingkaran atau keliling lingkaran dengan menggunakan rumus di atas, maka terlebih dahulu menentukan turunan pertama fungsi y terhadap variabel x dari persamaan lingkaran tersebut.

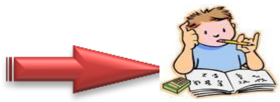
   $x^2 + y^2 = r^2$ (gunakan turunan fungsi implisit)

   $$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\dots}{\dots}$$

4) Kemudian tentukan batas integral, batas integral adalah $[-r\ ,\ \ldots\ ]$

5) Langkah terakhir hitunglah panjang kurva atau keliling lingkaran dengan rumus sebagai berikut:

$S = \int_a^b \sqrt{1 + (\frac{\cdots}{dx})^2}\ dx$ (Silahkan dibuktikan bahwa keliling lingkaran adalah $2\pi r$)



## LEMBAR KERJA-4.4

**Kerjakan semua soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1. Carilah panjang busur kurva $y = x^{3/2}$ , dari $x = 0$ sampai dengan $x = 5$.
2. Carilah panjang busur kurva $x = y^{3/2} - 1$ , dari $y = 0$ sampai dengan $y = 4$.
3. Carilah panjang busur kurva $y = \ln x$ , dari $x = 1$ sampai dengan $x = 2\sqrt{2}$.
4. Carilah panjang busur kurva $y = \ln \cos x$ , dari $x = \frac{\pi}{6}$ sampai dengan $x = \frac{\pi}{4}$.
5. Carilah panjang busur kurva parameter $x = t^2$ dan $y = t^3$, dari $t = 0$ sampai dengan $t = 4$.
6. Carilah panjang busur kurva parameter $x = e^t \cos t$ dan $y = e^t \sin t$, dari $t = 0$ sampai dengan $t = 4$.

****OOO****

## 4.5 LUAS PERMUKAAN BENDA PUTAR

Bahasan kali ini akan dibahas bagaimana menghitung luas permukaan dari suatu benda ruang. Bila akan menghitung luas permukaan bangun ruang yang beraturan (misal luas permukaan kubus, balok, tabung, bola, dll), maka sudah ada rumus untuk menghitung luas permukaan dari bangun-bangun ruang tersebut.

Gambar 4.34

Namun bila akan menghitung luas permukaan dari bangun-bangun yang tidak beraturan, seperti bangun ruang lampion seperti terlihat pada Gambar 4.34, maka perlu dicari terlebih dahulu rumus luas permukaannya.

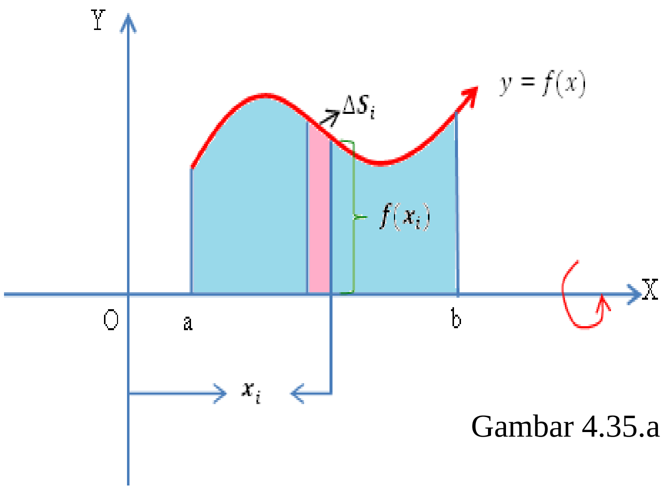
Oleh karena itu pada bahasan kali ini akan ditemukan langkah-langkah menemukan rumus permukaan dari suatu bangun ruang. Bangun ruang yang akan dibahas pada pembahasan kali ini bangun ruang yang terbentuk dari permutaran dari suatu bidang datar terhadap suatu garis atau sumbu tertentu, yang disebut dengan luas permukaan benda putar. Luas permukaan benda putar dicari dengan menggunakan pendekatan limit jumlah Reimann atau integral Reimann.

### BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORATIF-4.5

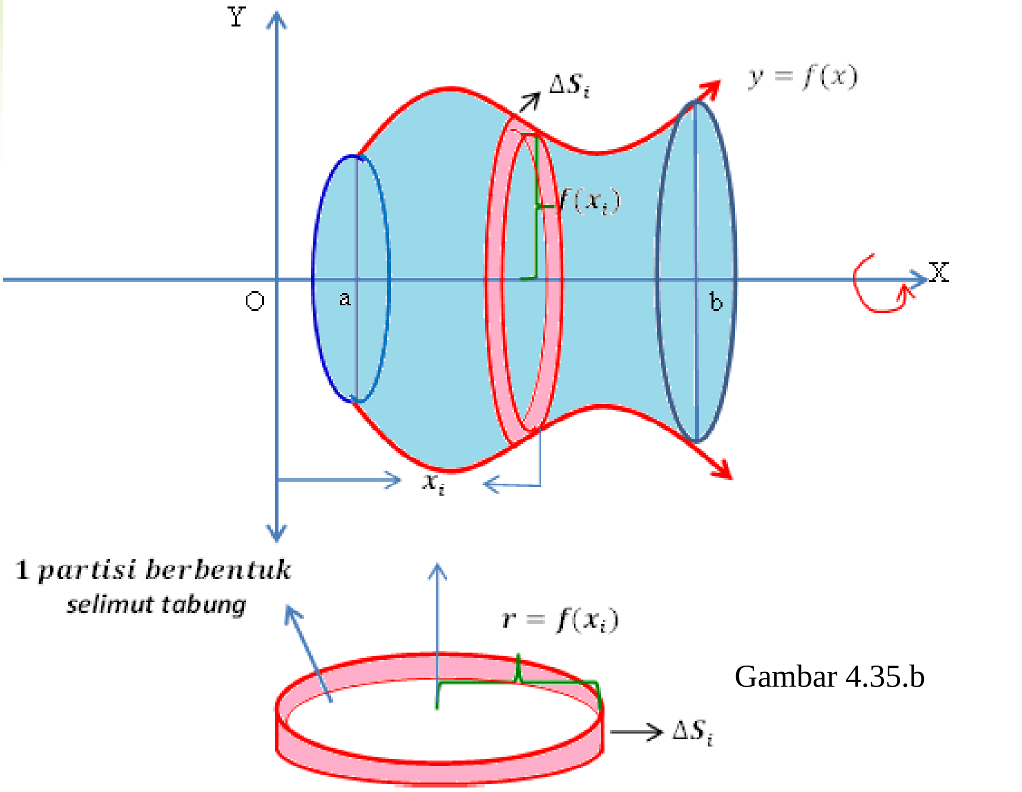
**Penemuan Rumus Luas Permukaan Benda Putar**

Misalkan daerah D dibatasi oleh $y = f(x)$ yang kontinu pada interval $[a\,, b]$, seperti terlihat pada Gambar 4.35.a

Bila daerah tersebut diputar mengelilingi sumbu $X$ sebesar $360^0$, seperti terlihat pada Gambar 4.35.b berikut.



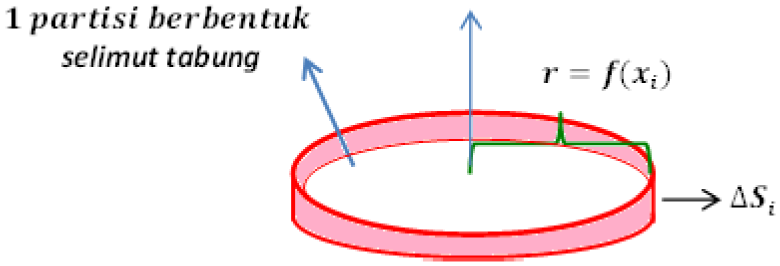
Gambar 4.35.a



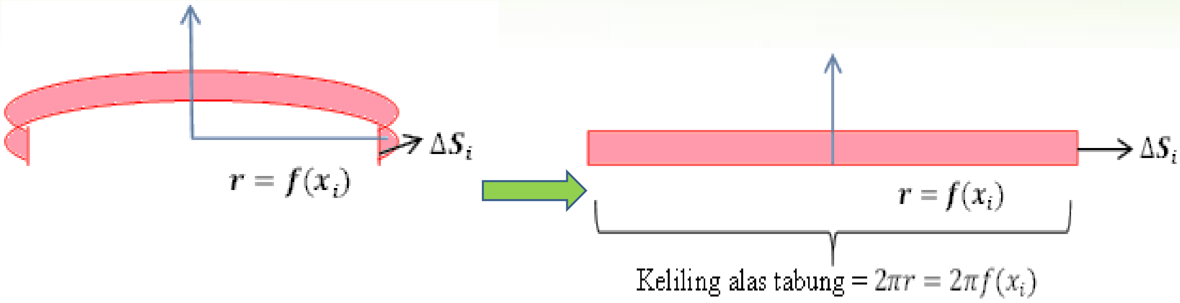

Gambar 4.35.b

**Langkah-langkah menemukan rumus luas permukaan, sebagai berikut.**

1) Perhatikan partisi ke-i pada interval $[x_{i-1}, x_i]$ dari Gambar 4.35.b. sehingga perputarannya akan terbentuk seperti tabung, sehingga dapat ditemukan rumus luas permukaan atau luas selimut tabung.



Pada partisi ke-i terlihat bentuk tabung dengan jari-jari tabung $r = f(x_i)$ dan tinggi tabung $\Delta S_i$, Bila tabung tersebut dibuka sehingga akan terlihat seperti gambar berikut.




Pada gambar partisi ke-i di atas, bila diluruskan akan menjadi bentuk persegi panjang, dengan panjang = keliling alas tabung, dan tingginya = $\Delta S_i$. Sehingga rumus luas permukaan tabung bagian ke-i = luas persegi panjang = panjang . lebar

$\Delta L_i = panjang\,.lebar = keliling\ alas\ tabung\,.lebar = 2\pi f(x_i)\Delta S_i$

Sehingga luas permukaan benda putar tersebut adalah:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta S_i$$

Bila kedua ruas diambil limit untuk $n \to \sim$, maka akan diperoleh:

$$\lim_{n\to\sim} L = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta S_i$$

Dengan mengingat $\Delta S_i$ = panjang kurva ke-i, dengan rumus

$\Delta S_i = \sqrt{1 + \left(\frac{\ldots}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$ , maka rumus luas permukaan benda putar menjadi:

$$\lim_{n\to\sim} L = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \Delta S_i = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} \quad \ldots \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\ldots}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa rumus luas permukaan benda putar, dari daerah D yang dibatasi oleh kurva $y = f(x)$, kontinu pada $[a, b]$ diputar mengelilingi sumbu x dan mempunyai turunan pada variabel x, adalah sebagai berikut.

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \quad \ldots \quad ds = \int_a^b \quad \ldots \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\ldots}{dx}\right)^2}\ dx}$$

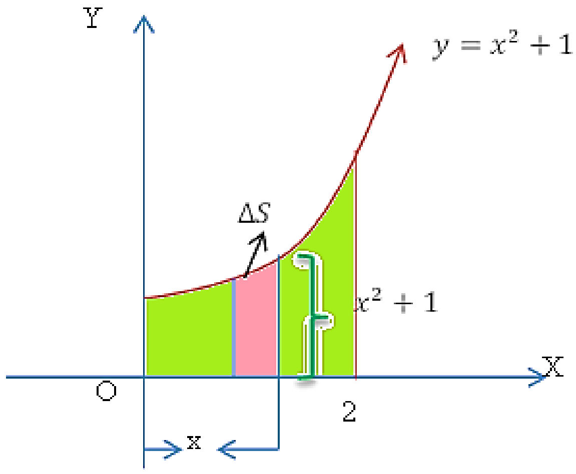
## Cek Pemahaman

Diketahui daerah D yang dibatasi oleh grafik $y = x^2 + 1$, sumbu $x$, sumbu y, dan garis $x = 2$. Bila daerah D diputar mengelilingi sumbu x, tentukan volume benda putar tersebut.

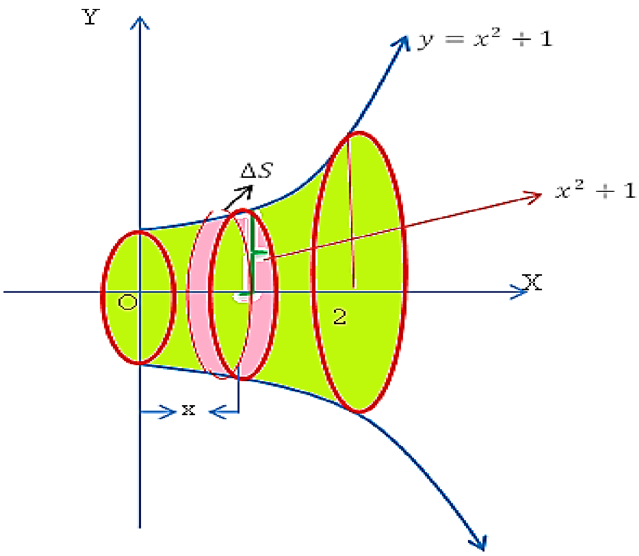
**Penyelesaian:**

Langkah-langkahnya sebagai berikut.

a. Gambarlah daerah D, sebagai berikut:




b. Gambarlah hasil perputaran daerah D, sebagai berikut:




c. Berdasarkan gambar tentukan batas daerah D = [0 , 2], jari-jari = r = … , dan tinggi = $\Delta S$ = …

d. Tentukan rumus luas permukaan benda putar dan hitunglah hasilnya.

$L = 2\pi r\,.\,t = 2\pi r.\Delta S = \int_a^b \quad \ldots \quad \sqrt{1 + \left(\frac{\ldots}{dx}\right)^2}\ dx$ (Silahkan dicari!)

## LEMBAR KERJA-4.5

**Kerjakan semua soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1 Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $y^2 = 12\,x$ , pada $0 \le x \le 3$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

2 Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $= \frac{1}{3}x^3$ , pada $0 \le x \le 3$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

3 Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $= \sqrt{25 - x^2}$ , pada $-2 \le x \le 3$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

4 Diketahui daerah D yang dibatasi ellips $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-4.3

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Volume suatu benda padat mempunyai alas berbentuk lingkaran yang berjari-jari 4 satuan, dan setiap penampang irisan benda yang tegak lurus dengan sumbu x merupakan segitiga samasisi adalah … satuan volume

   a. $\frac{67}{3}\sqrt{3}\,\pi$

   b. $\frac{117}{3}\sqrt{2}\,\pi$

   c. $\frac{256}{3}\sqrt{3}\,\pi$

   d. $\frac{133}{3}\pi$

   e. $\frac{183}{3}\pi$

2. Alas suatu benda padat merupakan daerah D yang dibatasi oleh $y^2 = 4x$ dan $x^2 = 4y$. Jika penampang irisan yang tegak lurus dengan sumbu xX berbentuk persegi, maka volume benda padat tersebut adalah … satuan volum

   a. $\frac{144}{35}$

   b. $\frac{117}{35}$

   c. $\frac{256}{33}$

   d. $\frac{135}{33}$

   e. $\frac{288}{35}$

3. Panjang busur kurva $6xy = x^4 + 3$, dari $x = 1$ sampai dengan $x = 2$ adalah … satuan panjang.

   a. $\frac{14}{3}$

b. $\frac{17}{12}$

c. $\frac{25}{13}$

d. $\frac{324}{5}$

e. $\frac{23}{15}$

4. Panjang busur kurva $y = arc\tan t \ \ dan\ x = ln\sqrt{1+t^2}$, dari $t = 0$ sampai dengan $t = 1$ adalah … satuan panjang.

a. $\frac{1}{3}$

b. $\frac{2}{3}$

c. $\frac{5}{3}$

d. $\frac{1}{4}$

e. 1

5. Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $= \frac{1}{3}x^3$ , pada $0 \le x \le 3$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka luas permukaan benda putar adalah … satuan luas

a. $\frac{(80\sqrt{82}-1)\pi}{8}$

b. $\frac{(72\sqrt{82}-1)\pi}{9}$

c. $\frac{(82\sqrt{82}-1)\pi}{9}$

d. $\frac{(69\sqrt{79}-1)\pi}{7}$

e. $\frac{(82\sqrt{7}-1)\pi}{8}$

6. Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $= y^3$ , pada $0 \le y \le 1$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $y$, maka luas permukaan benda putar adalah … satuan luas

a. $\frac{\pi(10\sqrt{10}-1)}{27}$

b. $\frac{\pi(12\sqrt{10}-1)}{17}$

c. $\dfrac{\pi(20\sqrt{10}-1)}{27}$

d. $\dfrac{\pi(11\sqrt{11}-1)}{27}$

e. $\dfrac{\pi(20\sqrt{20}-1)}{17}$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

7. Diketahui penampang benta tertentu dengan bidang yang tegak lurus dengan sumbu x berbentuk lingkaran dengan titik akhir garis tengahnya terletak pada parabola $y^2 = 9x$ dan $x^2 = 9y$. Carilah volume benda padat tersebut.
8. Carilah panjang busur kurva $y = \ln \sin x$ , dari $x = \frac{\pi}{6}$ sampai dengan $x = \frac{\pi}{4}$.
9. Carilah panjang busur kurva parameter $x = e^t \cos t$ dan $y = e^t \sin t$, dari $t = 0$ sampai dengan $t = 4$
10. Diketahui daerah D yang dibatasi kurva $y^2 + 4x = 2 \ln y$ , pada $1 \leq y \leq 3$. Jika daerah D diputar mengelilingi sumbu $x$, maka tentukan luas permukaan benda putar tersebut.

****OOO****

# BAB IV-4
# MOMENT & PUSAT MASSA
# DAN APLIKASI BIDANG FISIKA

**TUJUAN PEMBELAJARAN:**

1. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menentukan massa dan pusat massa.
2. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung usaha dengan integral.
3. Setelah mempelajari materi ini mahasiswa dapat menghitung tekanan zat cair dengan integral.

**FOKUS BAB:**

4.6 Massa dan Pusat Massa

4.7 Fisika:

a. Usaha

b. Tekanan Zat Cair

**PETA KONSEP**

## PENGANTAR

Dalam kehidupan sehari-hari, kita tidak lepas dari benda yang bermassa. Balok kayu, uang logam merupakan sebagian contoh benda yang dapat ditentukan massa, momen dan pusat massanya. Ketiga besaran fisika tersebut dapat dicari menggunakan integral tertentu.

Integral dapat diaplikasikan dalam bidang fisika, khususnya mekanika, yaitu tentang usaha mengandung pengertian sebagai segala sesuatu yang dilakukan oleh gaya pada suatu benda sehingga benda itu bergerak. Agar usaha berlangsung, maka gaya harus dikerahkan pada suatu benda hingga benda tersebut menempuh jarak tertentu. Apakah usaha baru dapat berlangsung bila benda berpindah? Bagaimana apabila benda yang diberikan gaya ternyata tidak bergerak atau berpindah? Apakah telah terjadi usaha?

Gambar 4.36

Gambar 4.36 menunjukkan sejumlah orang yang sedang mendorong sebuah kereta salju. Orang-orang tersebut masing-masing memberikan gaya melalui suatu dorongan kepada kereta salju sehingga kereta salju bergerak (berpindah). Adanya gaya yang bekerja sebuah kereta salju yang menyebabkan kereta salju tersebut berpindah tempat menunjukkan adanya usaha yang telah dilakukan oleh masing-masing orang itu. Untuk mengetahui besarnya usaha tersebut dapat dihitung dengan menggunakan pendekatan integral. Pembahasan selengkapnya diuraikan sebagai berikut.

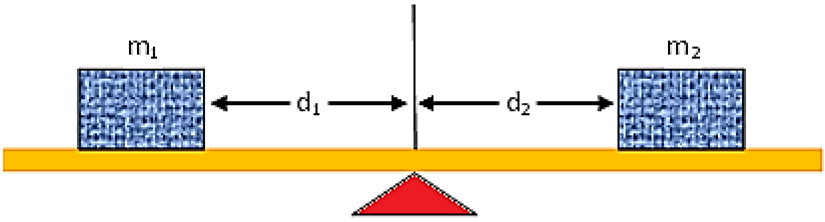
# 4.6 MASSA DAN PUSAT MASSA

**BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORASI-4.6**

**Penemuan Rumus Massa dan Pusat Massa**

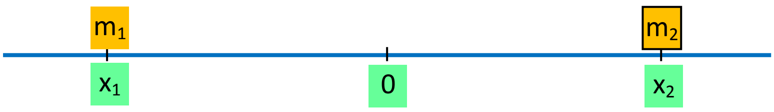
### 4.6.1 PUSAT MASSA SUATU BATANG

Andaikan ada dua massa, masing-masing sebesar $m_1$ dan $m_2$ yang diletakkan pada papan berimbang dan berjarak $d_1$ dan $d_2$ dari titik penyangga pada bagian-bagian yang berbeda (Gambar 4.37). Papan tersebut akan seimbang jika dan hanya jika $d_1 m_1 = d_2 m_2$.




Gambar 4.37

Suatu model matematis yang baik, diperoleh apabila papan tersebut dietakkan pada suatu sistem bandmil yang titik asalnya kita impitkan dengan titik penyangga papan (Gambar 4.38). Maka koordinat $x_1$ dari $x_2$ adalah $x_1 = -d_1$ dan dari $m_2$ adalah $x_2 = d_2$. Sehingga syarat keseimbangan adalah $x_1 m_1 + x_2 m_2 = 0$.




Gambar 4.38

Hasil kali massa $m$ dan jarak berarah dari suatu titik tertentu dinamakan momen partikel (benda) terhadap titik tersebut. Momen ini mengukur kecenderungan massa yang menghasilkan suatu putaran pada titik tersebut. Syarat agar supaya dua massa pada sebuah garis berimbang pada sebuah titik garis apabila jumlah momen-momen terhadap titik itu sama dengan nol.

Keadaan di atas untuk dua titik dapat diperluas. Jumlah momen $m$ (terhadap titik asal) suatu sistem yang terdiri atas $n$ massa, yaitu sebesar $m_1, m_2, \dots, m_n$ yang berada pada $x_1, x_2, \dots, x_n$ pada sumbu $x$ adalah jumlah momen masing-masing massa yaitu :

$$\boldsymbol{M_0 = x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \sum_{i=1}^{n} x_i m_i}$$

syarat keseimbangan dititik asal adalah $m_0 = 0$. Sudah tentu titik asal tidak perlu sekaligus menjadi titik seimbang sistem itu, kecuali dalam hal yang khusus. Akan tetapi yang pasti ialah bahwa ada titik seimbang itu(Gambar 4.39). Misalkan koordinat titik seimbang ini x, momen sistem terhadap titik ini harus nol, jadi:

$$\boldsymbol{(x_1 - \bar{x})m_1 + (x_2 - \bar{x})m_2 + \cdots + (x_n - \bar{x})m_n = 0}$$

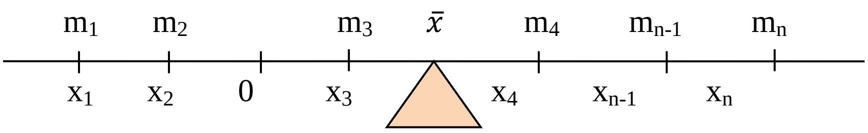
**atau**

$$\boldsymbol{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n = \bar{x} m_1 + \bar{x} m_2 + \cdots + \bar{x} m_n}$$

Bila kita terapkan untuk $\bar{x}$, maka kita peroleh:

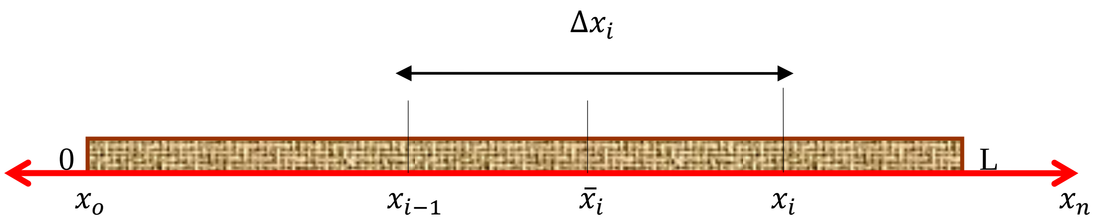
$$\boldsymbol{\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}}$$

Titik dengan koordinat dinamakan pusat massa, titik ini adalah titik seimbang.




**Gambar 4.39**

Konsep sistem $n$ partikel akan digunakan pada suatu batang padat horizontal dengan panjang $L$ yang ditempatkan diantara $x = 0$ dan$x = L$. Jika rapat massa (massa tiap satuan panjang) disetiap titik pada batang adalah $\rho(x)$, $\rho$ kontinu pada $[0,L]$, akan ditentukan massa, momen massa terhadap titik 0, dan pusat massa batang. Akan dibuat partisi $P = \{0 = x_0, x_1, \dots, x_n = L\}$ untuk $[0,L]$ kemudian pilihlah $\bar{x}_i$ sebagai titik tengah selang $[x_{i-1}, x_i]$ seperti pada Gambar 4.40 berikut ini:




**Gambar 4.40**

Pada selang bagian ke-$i$ anggaplah rapat massanya tetap sebesar $\rho(\bar{x}_i)$. Akibatnya massa batang pada selang ini adalah $\Delta m_i = \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i$ dan pusat massanya terletak dititik $\bar{x}_i$. Jadi kita mempunyai sistem *n* partikel dengan massa $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ yang terletak dititik $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$. Massa dan momen massa terhadap titik 0 dari batang dapat dihampiri oleh massa dan momen massa sistem *n* partikel ini, yaitu:

**Massa :** $\boldsymbol{M \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_1 = \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i}$

**Momen massa terhadap titik 0**: $\boldsymbol{M_0 \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i \bar{x}_i = \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i}$

Karena fungsi $\rho$ kontinu pada [0,$L$], maka jumlah Riemann ini mempunyai limit. Karena itu massa dan momen massa terhadap titik 0 dari batang dapat dinyatakan sebagai integral tentu yang merupakan limit jumlah Riemann tersebut. Dengan demikian diperoleh definisi berikut:

**Definisi Pusat Massa Batang**

Sebuah batang dengan panjang $L$ ditempatkan horizontal sehingga ujung kirinya dititik 0, rapat massa batang disetiap titik $x$ ∈ [0,$L$] adalah $\rho(x)$, dengan $\rho$ kontinu pada [0,$L$]. Massa batang, momen massa batang terhadap titik 0, dan titik pusat massa didefinisikan sebagai berikut: Massa : $M = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i = \int_0^L \rho(x)dx$

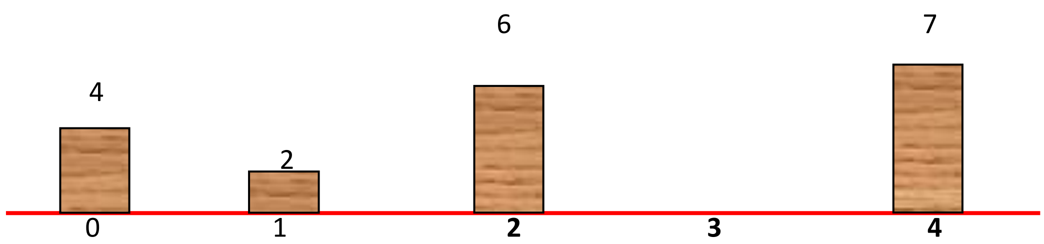
Momen massa terhadap titik 0 : $M_0 = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\, \rho(\bar{x}_i)\Delta x_i$

$$= \int_0^L \dots \dots \; dx$$

Titik pusat massa : $\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\int_0^L \dots \quad \dots \; dx}{\int_0^L \dots \; dx}$

## Cek Pemahaman

1. Diketahui massa sebesar 4,2,6 dan 7 ton pada posisi 0,1,2, dan 4 terhadap suatu sistem koordinat pada sumbu (Gambar 4.41). Tentukan titik berat sistem ini!




**Gambar 4.41**

**Penyelesaian:**

$$\bar{x} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2 + x_3m_3 + x_4m_4}{m_1 + m_2 + m_3 + m_4}$$

$$= \frac{(0)(\ \ldots\ ) + (1)(\ldots\ ) + (2)(\ldots\ ) + (4)(\ldots\ )}{4 + 2 + 6 + 7}$$

$$= \frac{\ldots}{19} \approx 2, \ldots$$

2. Tentukan pusat massa batang yang panjangnya 9 satuan dan rapat massanya disetiap titik yang jaraknya *x* satuan dari ujung kiri batang adalah $\rho(x) = 3x^2 + 2x$

**Penyelesaian:**

Tempatkan titik 0 diujung kiri batang. Rapat massa batang merupakan fungsi yang kontinu pada selang [0,9]. Berdasarkan rumus diatas, massa, momen massa terhadap titik *O*, dan pusat massa batang adalah sebagai berikut:

- Massa:

$$M = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \left(3\bar{x}_i{}^2 + 2\bar{x}_i\right)\Delta x_i = \int_0^9 (\ \ \ldots\ \ +\ \ \ldots\ )\ dx$$

$$= \ \ldots\ \ +\ \ \ldots\ \ \Big]_0^9$$

$$= \quad \ldots$$

- Momen massa terhadap titik 0 :

$$M_0 = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i\left(3\bar{x}_i{}^2 + 2\bar{x}_i\right)\Delta x_i$$

$$= \int_0^9 x\ (\ \ \ldots\ \ +\ \ \ \ldots\ \ )\ \ dx$$

$$= \int_0^9\ (\ \ \ldots\ \ +\ \ \ \ldots\ \ )\ dx$$

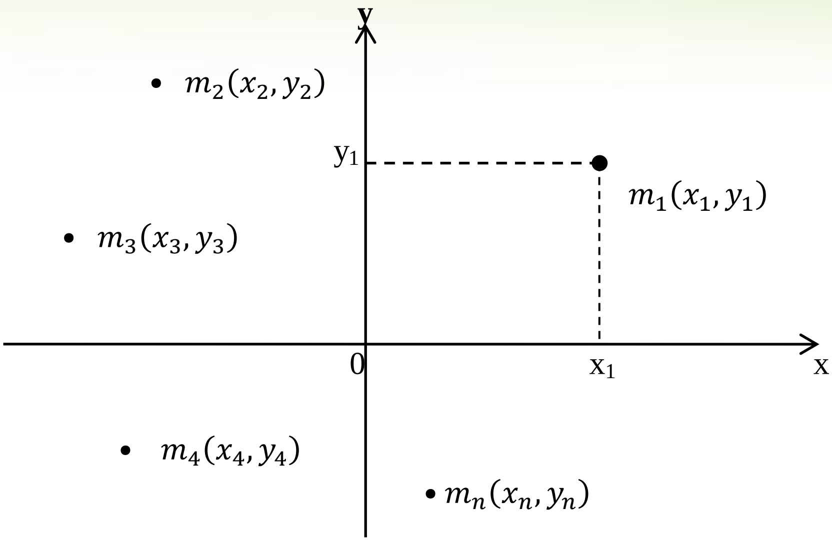
$$= \cdots\ \ +\ \ \ldots\ \Big]_0^9$$

$$= (\ \ \ldots\ \ +\ \ \ \ldots\ \ ) - (\ \ \ldots\ \ +\ \ \ \ldots\ \ )$$

$$= \frac{\ldots.}{12} = \quad \ldots$$

Pusat massa batang : $\bar{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\ldots}{810} = \quad \ldots$

### 4.6.2 PUSAT MASSA SUATU KEPING DATAR




**Gambar 4.42**

Pada Gambar 4.42 kita mempunyai sistem $n$ partikel pada bidang, massanya $m_1, m_2, \ldots, m_n$ dan terletak dititik $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Seperti sistem *n* partikel pada batang, massa sistem *n* partikel pada bidang didefinisikan sebagai jumlah semua massanya. Momen massanya terhadap sumbu koordinat didefinisikan sebagai jumlah dari setiap massa partikel dikalikan dengan jarak berarahnya terhadap sumbu koordinat tersebut. Jarak berarah berarti besarannya positif jika partikel diatas sumbu *x* atau dikanan sumbu *y*, negatif jika dibawah sumbu *x* atau disebelah kiri sumbu *y*, dan nol jika pada sumbu *x* atau sumbu *y*.

Dengan demikian, massa, momen massa terhadap sumbu koordinat, dan pusat massa sistem *n* partikel didefinisikan sebagai berikut:

Massa : $M = m_1 + m_2 + \cdots + m_n = \sum_{i=1}^{n} m_i$

Momen terhadap sumbu *x* : $M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i,\ y_i$ jarak berarah massa $m_i$ ke sumbu *x*

Momen terhadap sumbu *y* : $M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i,\ x_i$ jarak berarah massa ke sumbu *y*

Pusat massa : $(\bar{x}, \bar{y})$, dengan $\bar{x} = \frac{M_y}{M}$ dan $\bar{y} = \frac{M_x}{M}$

## Cek Pemahaman

3. Ada 5 partikel dengan massa sebesar 1, 4, 2, 3, dan 2 satuan massa yang masing-masing ada dititik (6,-1), (2,3), (-4,2), (-7,4), dan (2,-2). Tentukan pusat massanya!

**Penyelesaian:**

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i = 1 + 4 + 2 + 3 + 2 = 12$$

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} m_i y_i = (1)(-1) + (4)(3) + (2)(2) + (3)(4) + (2)(-2) = 23$$

$$M_y = \sum_{i=1}^{n} m_i x_i = (1)(6) + (4)(2) + (2)(-4) + (3)(-7) + (2)(2) = -11$$

Pusat massa : $\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{-11}{12}$

$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{23}{12}$

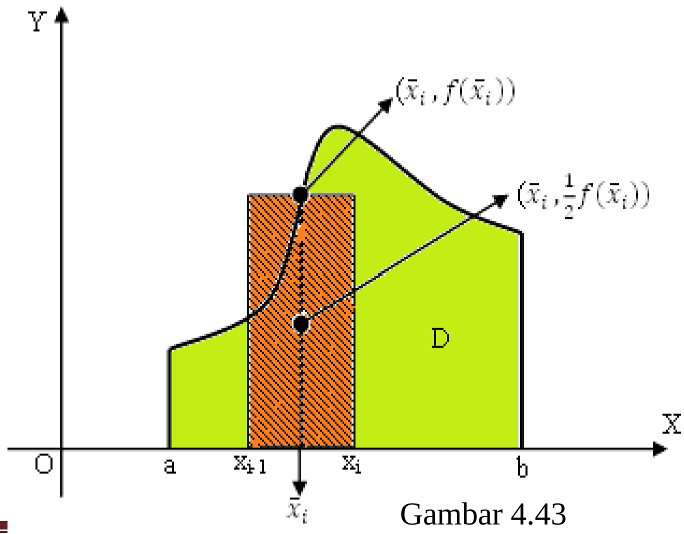
Jadi, $(\bar{x}, \bar{y})$= $\left(\frac{-11}{12}, \frac{23}{12}\right)$

Konsep sistem *n* partikel akan digunakan pada perhitungan massa, momen massa, dan pusat massa keping homogen dengan rapat massa tetap sebesar *k*.

### 4.6.2.a Daerah yang dibatasi oleh satu fungsi

Suatu keping datar berbentuk daerah yang dibatasi oleh grafik fungsi kontinu *f* pada [*a*,*b*], $f(x) \geq 0$ pada [*a*,*b*], garis *x* = *a*, garis *x* = *b* dan sumbu *x*.

Buatlah partisi *P* yang membagi selang [*a*,*b*] menjadi n bagian yang sama panjang, dengan selang bagian ke-*i* adalah $[x_{i-1}, x_i]$ dan $\bar{x}_i = \frac{1}{2}[x_{i-1} + x_i]$. Disini kita mempunyai n buah persegipanjang, dengan




Gambar 4.43

persegipanjang ke-$i$, diperlihatkan Gambar 4.43.

Karena keping tersebut mempunyai rapat massa konstan, maka pusat massa dari setiap persegipanjang adalah titik $\left(\bar{x}_i\,,\frac{1}{2}f(\bar{x}_i)\right)$, yang merupakan perpotongan kedua diagonal persegipanjang. Pusat massa ini dapat dianggap sebagai wakil dari elemen massa persegi panjang ke-$i$, sehingga berdasarkan ini kita memperoleh suatu hasil untuk defini pusat massa keping datar yang dibatasi 1 fungsi berikut ini:

- **Definisi Pusat Massa Keping Datar dengan Rapat Massa Tetap**

Keping datar dengan fungsi $f$ kontinu pada [$a$,$b$] mempunuyai rapat massa konstan sebesar $k$. Massa, momen massa terhadap sumbu koordinat, dan pusat massa dari keping datar $D$ didefinisikan sebagai berikut:

Massa :

$$M = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x_i = k\int_a^b \quad \dots \quad dx$$

Momen massa terhadap sumbu $x$ :

$$M_x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (kf(\bar{x}_i)\Delta x_i)\left(\frac{1}{2}f(\bar{x}_i)\right)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \frac{1}{2}k \sum_{i=1}^{n} f^2(\bar{x}_i)\Delta x_i = \frac{1}{2}k\int_a^b \quad \dots \quad dx$$

Momen massa terhadap sumbu $y$ :

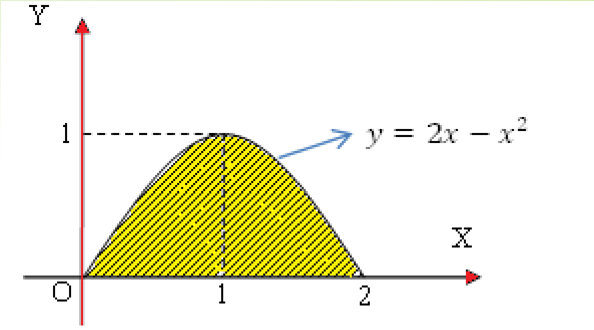
$$M_y = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (kf(\bar{x}_i)\Delta x_i)\,(\bar{x}_i) = k\int_a^b \quad \dots \quad dx$$

Pusat massa : $(\bar{x},\bar{y})$, dengan $\bar{x} = \frac{\dots}{M}$ dan $\bar{y} = \frac{\dots}{M}$

## Cek Pemahaman

4. Tentukan pusat daerah $D$ yang dibatasi oleh $y = 2x - x^2$ dan sumbu $x$

**Penyelesaian:**




- Massa daerah $D$ :

$$M = k\int_0^2 (2x - x^2)dx = k\left(x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^2 = k\left(4 - \tfrac{8}{3}\right) = \tfrac{4}{3}k$$

- Momen daerah $D$ terhadap sumbu $x$ :

$$M_x = \tfrac{1}{2}k\int_0^2 (2x - x^2)^2\, dx = \tfrac{1}{2}k\int_0^2 (\ \dots\ -\ \dots\ +\ \dots\ )\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}k(\ \dots\ -\ \dots\ +\ \dots\ )\Big|_0^2 = \ \dots\ k$$

- Momen daerah $D$ terhadap sumbu $y$ :

$$M_y = k\int_0^2 x(2x - x^2)dx = k\int_0^2 (\ \dots\ -\ \dots\ )dx$$

$$= k(\dots\ -\ \dots\ )\Big|_0^2 = k(\dots\ -\ \dots\ ) = \ \dots\ k$$

- Pusat daerah $D$ :

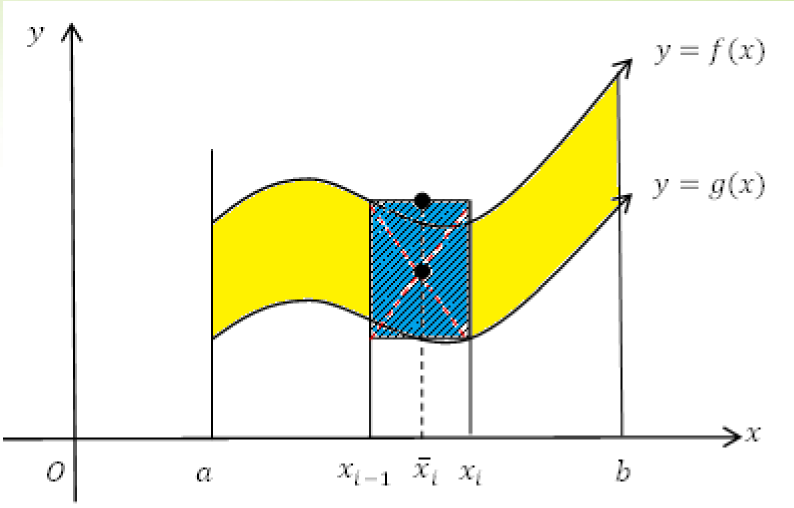
$$(\bar{x},\bar{y}), \bar{x} = \frac{\cdots}{M} = \frac{\cdots}{\frac{4}{3}k} = \cdots$$

$$\bar{y} = \frac{\cdots}{M} = \frac{\cdots}{\frac{4}{3}k} = \cdots$$

Jadi pusat daerah $D$ adalah $(\bar{x},\bar{y}) = (\dots\ ,\ \dots\ )$

### 4.6.2.b Daerah yang dibatasi oleh dua fungsi

Kita mempunyai keping datar yang berbentuk daerah: $D = \{(x,y) : a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$, dengan fungsi $f$ dan $g$ kontinu pada $[a,b]$. Buatlah partisi $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n = b\}$ yang membagi $[a,b]$ atas $n$ bagian kemudian pilihlah titik tengah $c_i$ pada selang $[x_{i-1,}x_i]$ seperti pada Gambar 4.44 berikut:




Gambar 4.44

Partisi ini menghasilkan $n$ buah persegi panjang dengan alas $\Delta x_i - x_{i-1}$ dan tinggi $f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)$. Massa keping pada selang bagian ke-$i$ dihampiri oleh massa persegi panjang ke-$i$, yaitu: $\Delta \boldsymbol{m_i} = \mathrm{k}.(\text{luas persegi panjang}) = \boldsymbol{k}.\left(\boldsymbol{f}(\bar{x}_i) - \boldsymbol{g}(\bar{x}_i)\right)\Delta \boldsymbol{x_i}, \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}.$

Karena rapat massanya tetap dan $c_i$ titik tengah $[x_{i-1}, x_i]$, maka pusat massa persegi panjang ke-$i$ terletak pada perpotongan diagonalnya, yang koordinatnya yaitu:

$$\boldsymbol{P_i} = \left(\bar{x}_i, \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\left(\boldsymbol{f}(\bar{x}_i) + \boldsymbol{g}(\bar{x}_i)\right)\right), \boldsymbol{i} = \boldsymbol{1}, \boldsymbol{2}, \dots, \boldsymbol{n}.$$

Jarak berarah dari titik $P_i$ ke sumbu $x$ adalah $\frac{1}{2}(f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i))$ dan ke sumbu y adalah $\bar{x}_i,\ i = 1, 2, \dots, n$. Berdasarkan hampiran ini diperoleh sistem $n$ partikel pada bidang dengan massa $\Delta m_1, \Delta m_2, \dots, \Delta m_n$ yang terletak dititik $P_1, P_2, \dots, P_n$. Konsep sistem $n$ partikel memberikan hampiran untuk massa, momen massa terhadap sumbu koordinat, dan pusat massa keping datarnya. Nilai hampiran ini berbentuk jumlah Riemann yang mempunyai limit karena fungsi $f$ dan $g$ kontinu pada $[a,b]$. Karena itu massa dan momen massa terhadap sumbu koordinat dari keping datar $D$ dapat dinyatakan sebagai integral tentu yang merupakan limit jumlah Riemann tersebut. Dengan demikian diperoleh definisi berikut:

- **Definisi Pusat Massa Keping Datar dengan Rapat Massa Tetap**

  Keping datar $D = \{(x, y): a \le x \le b, g(x) \le y \le f(x)\}$ dengan fungsi $f$ dan $g$ kontinu pada $[a,b]$ mempunuyai rapat massa konstan sebesar $k$. Massa, momen massa terhadap sumbu koordinat, dan pusat massa dari keping datar *D* didefinisikan sebagai berikut:

Massa : $M = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} k(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i = k\int_a^b (f(x) - g(x))dx$

Momen massa terhadap sumbu *x* :

$$M_x = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k(f(\bar{x}_i - g(\bar{x}_i))\Delta x_i) \left(\tfrac{1}{2}(f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i))\right)$$

$$= \lim_{|P|\to 0} \tfrac{1}{2}k \sum_{i=1}^{n} (f^2(\bar{x}_i) - g^2(\bar{x}_i))\Delta x_i = \tfrac{1}{2}k \int_a^b ( \quad .... \quad - \quad .... \quad )dx$$

Momen massa terhadap sumbu *y* :

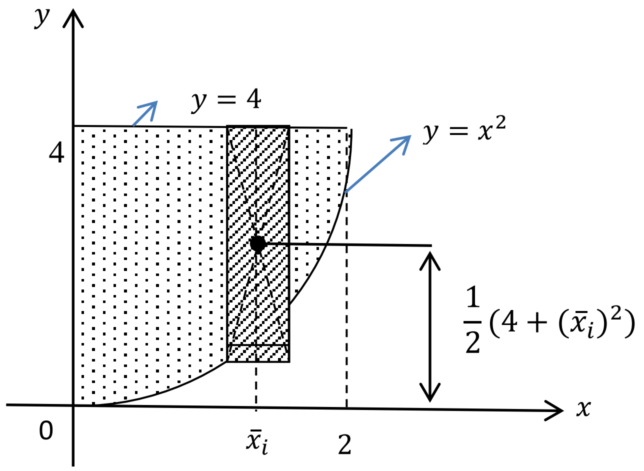
$$M_y = \lim_{|P|\to 0} \sum_{i=1}^{n} (k(f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i))\Delta x_i)\,(\bar{x}_i) = k\int_a^b x( \, .... \quad - \quad .... \,)\, dx$$

Pusat massa : $(\bar{x}, \bar{y})$, dengan $\bar{x} = \frac{....}{M}$ dan $\bar{y} = \frac{....}{M}$

## Cek Pemahaman

5. Tentukan pusat daerah $D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, x^2 \le y \le 4\}$.

**Penyelesaian:**




- Massa daerah *D* :

$$M = k\int_0^2 (4 - X^2)dx = k\left(4x - \tfrac{1}{3}x^3\right)_0^2 = k\left(8 - \frac{8}{3}\right) = 5\tfrac{1}{3}k$$

- Momen daerah $D$ terhadap sumbu $x$ :

$$M_x = \frac{1}{2}k\int_0^2 (16 - x^4)\,dx = \frac{1}{2}k(\ \ \dots\ -\ \ \dots.\ )_0^2 = \frac{1}{2}k(\ \ \dots\ -\ \ \dots.\ ) = \ \dots$$

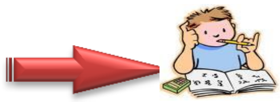
- Momen daerah $D$ terhadap sumbu $y$ :

$$M_y = k\int_{i=1}^{n} x(4 - x^2)dx = k\int_0^2 (\ \ \dots\ -\ \ \dots.\ )dx = k(\ \ \dots\ -\ \ \dots.\ )_0^2 = \ \dots$$

- Pusat daerah $D$ :

$$(\bar{x}, \bar{y}),\ \ \bar{x} = \frac{\dots}{M} = \frac{\dots}{5\frac{1}{3}k} = \ \dots\ ,\ \bar{y} = \frac{\dots}{M} = \frac{\dots}{5\frac{1}{3}k} = \ \dots$$

Jadi pusat daerah D adalah $(\bar{x}, \bar{y}) = (\ \dots\ ,\ \dots.\ )$



## LEMBAR KERJA-4.6

**Kerjakan semua soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1. Tentukan sentroid daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sin x$, pada $0 \le x \le \pi$ dan sumbu x.
2. Diketahui D adalah suatu keping datar berbentuk daerah yang dibatasi oleh $y = x^2$ dan $y = x + 2$. Tentukan:
   a. Massa keping
   b. Momen massa keping terhadap sumbu $x$.
   c. Momen massa keping terhadap sumbu .
   d. Pusat massa keping.
3. Pada garis yang ada sistem koordinatnya ada $m_1 = 4$ , $m_2 = 6$, dan $m_3 = 9$ yang terdapat pada titik–titik $x_1 = 2$ , $x_2 = -2$ , dan $x_3 = 1$. Tentukan pusat massanya.
4. Tentukan pusat massa daerah D yang dibatasi oleh kurva – kurva berikut ini dan masing – masing gambarlah daerah D.
   a. $y = 4x - x^2$ , $garis\ x = 1\ \ dan\ sumbu\ x$
   b. $y = 4x - x^2\ \ dan\ \ x + y = 2$

c. $y = 2x - 4\,, y = 2\sqrt{x}\,, dan\ sumbu\ x$

5. Sepotong kawat lurus panjangnya 9 satuan dan dengan kepadatan $\delta(x) = \sqrt{x}$ pada sebuah titik yang jauhnya $x$ satuan dari salah satu ujungnya. Tentukan jarak dari ujung ini kepusat massa dawai.

****OOO****

## 4.7 APLIKASI BIDANG FISIKA-USAHA

### BAHAN DISKUSI SECARA KOLABORASI-4.7

**Penemuan Rumus Usaha Dengan Gaya Konstan**

Salah penggunaan integral tertentu ialah menghitung besamya usaha yang dibuat oleh suatu gaya yang bekerja pada benda agar bergerak sepanjang garis lurus tertentu dari suatu titik ke titik lainnya. Dalam sudut pandang fisika, khususnya mekanika, usaha mengandung pengertian sebagai segala sesuatu yang dilakukan oleh gaya pada suatu benda sehingga benda itu bergerak. Agar usaha berlangsung, maka gaya harus dikerahkan pada suatu benda hingga benda tersebut menempuh jarak tertentu. Apakah usaha baru dapat berlangsung bila benda berpindah? Bagaimana apabila benda yang diberikan gaya ternyata tidak bergerak atau berpindah? Apakah telah terjadi usaha?

Pengertian fisis usaha ialah liasil kali antara gaya yang bekerja pada suatu benda dengan jarak tempuhnya. Jadi bila suatu benda bergerak sepanjang sumbu $x$ dari $a$ ke $b$ dengan suatu gaya tetap sebesar F yang bekerja sepanjang arah gerakan, maka besarnya usaha $W$ ialah: $W = F(b-a)$.

Perumuman dari situasi ini ialah menentukan besamya usaha yang dibuat oleh suatu gaya yang tidak tetap, yaitu bergantung dari letak benda. Pada kasus ini kita mempunyai suatu gaya sebesar $y = f(x)$ yang bekerja dalam arah gerakan benda pada sumbu $x$ dari $a$ ke $b$ dengan fungsi $f$ kontinu pada $[a\,,b]$. Masalah yang akan kita pelajari ialah menghitung besarnya usaha yang diperlukan untuk memindahkan benda tersebut dari $a$ ke $b$.

Misalkan A adalah suatu partisi untuk $[a\,,b]$ yang membagi selang itu atas n bagian yang sama dengan sekarang bagian ke-i adalah $[x_{i-1}\,, x_i\,]$ dan panjangnya $\Delta x_i$. Jika jarak $x_{i-1}$ ke $x_i$ cukup kecil, maka gaya yang bekerja pada selang bagian ke-i-nya hampir konstan, sehingga kita dapat mengandaikan besarnya gaya $y = f(x)$ pada selang bagian itu konstan. Kemudian, bila $\bar{x}_i$ suatu titik pada selang $[x_{i-1}\,, x_i\,]$, maka besarnya gaya besarnya gaya konstan tersebut dapat diandaikan $f(\bar{x}_i)$ dengan jarak perpindahannya $\Delta x_i$, sehingga besarnya usaha $\Delta W_i$ untuk memindahkan benda tersebut dari $x_{i-1}$ ke $x_i$ dengan gaya tetap sebesar $f(\bar{x}_i)$ adalah:

$$\Delta W_i = f(\bar{x}_i)\ \Delta x_i$$

Besarnya usaha untuk memindahkan benda dari a ke b dapat dihampiri oleh jumlah dari usaha yang diperlukan untuk memindahkan benda di setiap selang bagian pada partisinya. Jadi kita mempunyai

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

dengan jumlah di ruas paling kanan mempunyai limit karena fungsi f kontinu pada $[a\,,b]$. Dengan demikian, besarnya usaha total yang dibuat oleh gaya itu agar benda bergerak dari $a$ ke $b$ adalah limit jumlahnya, yang merupakan suatu integral tertentu. Hasilnya kita nyatakan dalam definisi berikut.

**Definisi, Usaha Memindahkan Benda dari a ke b.**

Misalkan fungsi kontinu $f$ pada $[a\,,b]$, $y = f(x)$ menyatakan besaniya gaya yang bekerja di titik pada sumbu $x$. Maka besaniya usaha $W$ yang dibuat oleh gaya $f$ agar benda bergerak sepanjang sumbu $x$ dari $x = a\ ke\ x = b$ adalah:

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i})\Delta x_i$$

$$W = \lim_{n\to\sim} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta\,x_i = \int \ \dots \quad dx$$

## Cek Pemahaman

1. Panjang asal suatu pegas adalah 40 cm dan diperlukan gaya sebesar *2* kg untuk mergangnya menjadi 50 cm. Tentukan besaniya usaha yang diperlukan untuk meregang pegas itu 5 cm dari panjang asalnya.

**Penyelesaian:**

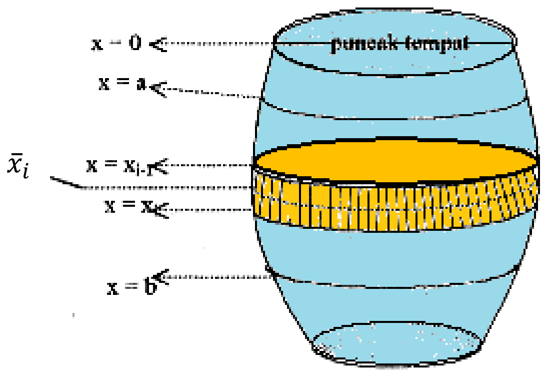
Tempatkan pegas itu mendatar dengan titik asal 0 di ujung kanan pegas. Misalkan x menyatakan regangan pegas dan f(x) menyatakan besarnya gaya pegas untuk meregangnya sejauh x.Menurut hukum Hooke, f(x) = kx, k konstanta. Dari saol, agar pegas bertambah panjang 0,1 m diperlukan gaya sebesar *2* kg. Akibatnya, f(0,l) = 2, sehingga k = 20. Jadi gaya pegas untuk meregang sejauh x m ialah f(x) = 20 kg.

Usaha yang diperlukan agar pegas meregang sejauh 5 cm (0,05 m) dari panjang asalnya ialah:

$W = \lim_{n \to \sim} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\, \Delta x_i = \int \quad ... \quad dx = \quad$ ... (Silahkan dicari!)

**Penemuan Rumus Usaha Untuk Memompa Zat Cair**

Kasus lain untuk topik ini adalah menghitung besarnya usaha yang diperlukan untuk memopa keluar zat cair pada suatu tempat dari kedalaman a sampai b. Perhatikan gambar berikut. Tempat di atas berisi zat cair homogen yang beratnya w kg/m$^3$ dengan kedalaman x = a meter dari puncak tempat. Aka ditentukan besarnya usaha untuk memompa keluar zat cair ini sampai pada kedalaman x = b meter dari puncak tempat seperti pada Gambar 4.45.




Gambar 4.45

Untuk a ≤ x ≤ b, misalkan A (x) menyatakan luas penampang bidang sejajar dengan permukaan puncat tempat pada kedalaman x meter dari puncaknya, A kontinu pada [a,b]. Buatlah partisi Δ yang membagi [a,b] atas n bagian dengan selang bagian ke-i nya $[x_{i-1}, x_i]$. Bila $c_i$ terletak pada selang bagian itu, maka luas penampang untuk selang bagian ke-i dapat diandaikan $A(\bar{x}_i)$ dan isi zat cair pada silinder ke-i adalah:

$\Delta I_i = A(\bar{x}_{i1})\, \Delta x_i$ dan beratnya: $w\, \Delta I_i = w\, A(\bar{x}_i)\, Ax_i$

Pada selang bagian ke-i ini, jarak perpindahan zat cair dapat diandaikan $\bar{x}_i$, sehingga usaha yang dipcrlukan untuk memompa zat cair keluar pada silinder ke-i adaiah

$$\Delta Wi = w\, A(\bar{x}_i)\, \bar{x}_i\, Axi$$

Besarnya usaha untuk memompa keluar zat cair dari a ke b dapat dihampiri oleh jumlah usaha dari setiap selang bagian pada partisinya, yaitu

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{n} A(\overline{x_i})\Delta X_i$$

Jumlah Riemann di ruas paling kanan mempunyai limit karena A kontinu pada [a,b]. Jadi besarnya usaha untuk memompa zat cair dari a ke b adalah limit jumlahnya, yaitu:

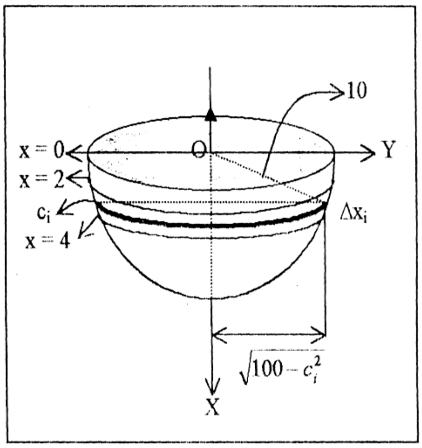
$$W = \lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w \overline{x_i}\, A(\overline{x_i}) \Delta x_i = w \int_a^b x\, A(x) dx$$

## Cek Pemahaman

2. Suatu tanki air berbentuk setengah bola berjari-jari 10 meter berisi zat cair homogen yang beratnya w kg/m$^3$. Tentukan besarnya usaha yang diperlukan untuk memompa zat cair itu keluar tanki dari kedalaman *2* meter sampai dengan 4 meter dari puncaknya.

**Penyelesaian:**

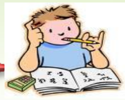
Perhatikan gambar di samping. Penampang tanki dengan bidang yang sejajar puncaknya dan melalui $x = \overline{x_i}$ berbentuk lingkaran yang jari-jarinya $\sqrt{100 - \overline{x_i}^2}$ . Akibatnya, luas penampang ini adalah: A($c_i$) = π (100 - $\overline{x_i}^2$ ), sehingga besarnya usaha yang diperlukan untuk memompa zat cair keluar tanki dari kedalaman *2* m sampai 4 m adalah:




W =

$$\lim_{|\Delta| \to 0} \sum_{i=1}^{n} w\pi \overline{x_i} (100 - \overline{x_i}^2) \Delta x_i = w\pi \int_2^4 x(\ \cdots - \cdots\ ) dx = w\pi \int_2^4 (\ \cdots - \cdots\ ) dx$$

$$= w\pi(\ \cdots - \cdots\ )_2^4 = w\pi(\cdots - \cdots - \cdots + \cdots) = \ \ldots\ w\pi\, kgm$$



## LEMBAR KERJA-4.7

**Kerjakan semua soal di bawah ini dengan langkah-langkah yang benar!**

1. Jika suatu gaya 360 Newton meregangkan 4 m pegas sepanjang 0,3 m, Carilah usaha yang dilakukan untuk meregangkan:
   a. Dari 4 m menjadi 5 m
   b. Dari 5 m mmenjadi 5,3 m.
2. Carilah usaha yang dilakukan untuk menaikkan batubara seberat 500 kg dari tambangnya yang memiliki kedalaman 500 meter dengan kabel yang beratnya 30 $Nm^{-1}$.
3. Sebuah tandon air alasnya berbentuk persegi dengan sisi 2,5 m dan dalamnya 2 m. Carilah usaha yang dilakukan untuk mengosongkan tandon ke luar dari puncaknya, jika:
   a. Tandon penuh dengan air
   b. Jika $\frac{3}{4}$ tandonnya penuh dengan air.

****OOO****

## UJI KOMPETENSI-4.4

**A. Pilihan Ganda:Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!**

1. Pusat massa pada garis yang ada pada sistem koordinatnya ada pada massa $m_1 = 4, m_2 = 6$, dan $m_3 = 9$ yang terdapat pada titik-titik $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, dan $x_3 = 1$, adalah …

   a. $\frac{6}{17}$

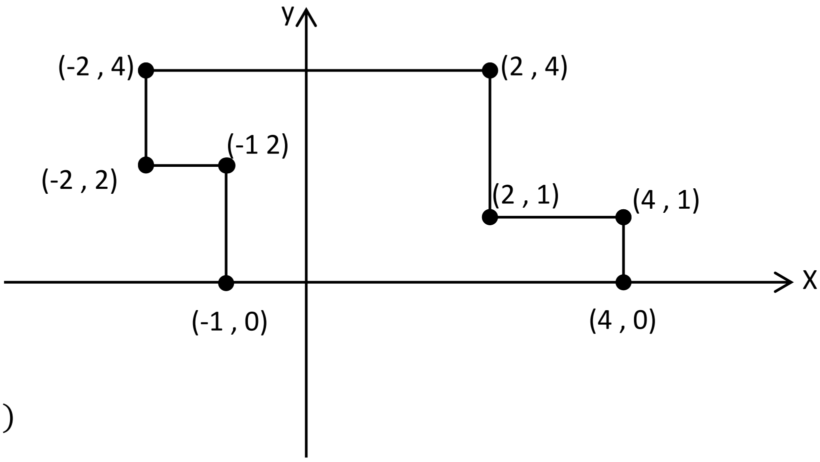
   b. $\frac{9}{15}$

   c. $\frac{5}{19}$

   d. $\frac{13}{9}$

   e. $\frac{3}{19}$

2. Pusat massa bidang yang memiliki sistem koordinat terdapat massa dengan lokasinya seperti pada Gambat berikut adalah …




   a. $(\frac{6}{19}, \frac{31}{19})$

   b. $(\frac{6}{16}, \frac{31}{16})$

   c. $(\frac{16}{9}, \frac{31}{19})$

   d. $(\frac{9}{16}, \frac{31}{16})$

   e. $(\frac{6}{9}, \frac{31}{16})$

3. Pusat massa bidang datar yang dibatasi oleh $y = x^3$ , $y = 0$, da$n$ $x = 2$ adalah ..
   a. $(\frac{6}{5}\ ,\ \frac{13}{6})$
   b. $(\frac{6}{7}\ ,\ \frac{16}{6})$
   c. $(\frac{8}{9}\ ,\ \frac{13}{9})$
   d. $(\frac{8}{5}\ ,\ \frac{16}{7})$
   e. $(\frac{6}{5}\ ,\ \frac{17}{7})$
4. Pusat massa bidang datar yang dibatasi oleh $x = y^2$ , dan $x^2 = -8y$ adalah …
   a. $(\frac{6}{5}\ ,\ \frac{9}{6})$
   b. $(\frac{9}{5}\ ,\ \frac{-9}{10})$
   c. $(\frac{-8}{9}\ ,\ \frac{3}{9})$
   d. $(\frac{8}{5}\ ,\ \frac{-6}{7})$
   e. $(\frac{-6}{5}\ ,\ \frac{9}{7})$
5. Sebuah pegas panjangnya 10 cm, pegas ini ditekan sehingga panjangnya menjadi 8 cm. untuk penekanan tersebut diperlukan gaya sebesar 200 dynes. Besarnya gaya yang diperlukan untuk menekan pegas dari panjang alami hingga panjangnya menjadi 6 cm adalah … *erg*
   a. 809
   b. 900
   c. 800
   d. 805
   e. 700
6. Sebuah tangki yang berbentuk setengah bola, yang berjari-jari 1 m berisi penuh dengan air. Bsarnya usaha yang dilakukan untuk mengeluarkan air melalui sisi tangki adalah … *Joule*.
   a. $2350\,\pi$
   b. $2500\,\pi$
   c. $2450\,\pi$
   d. $2300\,\pi$
   e. $2400\,\pi$

**B. Soal Essay: Kerjakan dengan langkah-langkah yang benar!**

7. Diketahui D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh parabola $x = 4y - y^2$ dan garis $y = x$. Gambarkan daerah D dan tentukan pusat massanya.
8. Diketahui D adalah suatu daerah yang dibatasi oleh parabola $y = 2 - x^2$ dan garis $y = x^2|x|$. Gambarkan daerah D dan tentukan pusat massanya.
9. Suatu kolam renang berbentuk balok tegak dengan panjang 25 meter, lebar 10 meter dan dalamnya 3 meter. Jika pada suatu kolam itu penuh berisi air, maka tentukan usaha yang diperlukan untuk memompa air keluar kolam itu sampai kedalaman 1 meter dari permukaannya.
10. Suatu tangki berbentuk silinder tegak dengan jari-jari lingkaran alas 1 meter dan tinggi 2 meter berisi air setinggi 1,5 meter di atas dasarnya. Tentukan usaha untuk memompa air keluar tangki sampai tinggi air dalam tangki tinggal 1 meter.

****OOO****

# DAFTAR PUSTAKA


Edwards, C.H dan D.E. Penney. 2000. *Kalkulus dengan Analisis Geometri*. PT Prenhallindo. Jakarta.

Keisler, H. J. (2000), *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, 2nd Edition, University of Wisconsin.

Larson, R., R. Hostetler, B. H. Edwards, 2007, *Calculus: Early Transcendental Functions,* 4th Edition, Houghton Mi- in Company.

Leithold, L. 1984. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. PT Bina Aksara. Jakarta.

Martono, K. 1999. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta.

Purcell, E.J., D.Varberg, and S.E. Rigdon. 2004. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta.

Smithee, A. 2006. *The Integral Calculus*, (Online), (http://www.classicalrealanalysis.com, diakses tanggal 17 Juni 2013).

Steward, J. 2002. *Kalkulus*. Erlangga. Jakarta.

# KALKULUS II
# *INTERACTIVE DIGITAL BOOKS*

*Interactive Digital Book adalah* sebuah bentuk buku yang dapat dibuka secara elektronis melalui komputer dan didesain agar dapat memberi respon atau umpan balik secara langsung pada pengguna/user.

*Kalkulus II Berbasis Interactive Digital Book adalah* buku yang berisi materi kalkulus integral yang dapat dibuka secara elektronis melalui komputer dan dilengkapi soal evaluasi yang dapat memberi respon atau umpan balik secara langsung pada mahasiswa, sehingga hasilnya dapat langsung diketahui.

**Penelitian Produk Terapan**
**Tahun 2017**

ISBN 978-602-52562-3-3